

MATHÉMATIQUES N°9

Remarque : le dernier contrôle de l'année, plutôt cool non ?

► Dans tout le contrôle, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ◀

Exercice 0 : (1 point)

Donner l'équation du cercle de centre $\Omega(5 ; -2)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.

On donnera la réponse finale sous la forme $x^2 + y^2 + \dots = 0$

Exercice 1 : (9 points)

On considère les points $A(2 ; 5)$, $B(6 ; 1)$ et $C(2 ; 0)$.

1. On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(x ; y)$ vérifiant l'équation :

$$x^2 + y^2 - 7x - 5y + 10 = 0$$

- a. Vérifier que le point A appartient à l'ensemble $\mathcal{C}$.
- b. Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera les coordonnées du centre Ω et le rayon.
- c. Calculer les longueurs $B\Omega$ et $C\Omega$.
- d. Que représente $\mathcal{C}$ pour le triangle ABC ?

2. a. Déterminer l'équation cartésienne de la hauteur d_1 issue de B du triangle ABC.

Pour la suite, on utilisera si besoin $d_1 : y = 1$.

- b. Sachant que la hauteur d_2 issue de C est $-x + y + 2 = 0$, déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC (c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle).

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de d_2 et de $\mathcal{C}$. L'un des points d'intersection est C, et on appellera l'autre H'.

Exercice 2 : (3 points)

1° Soit (d) la droite d'équation $x + 2y - 4 = 0$ et $A(3 ; -1)$. Déterminer l'équation de la droite (d') parallèle à (d) et passant par A.

2° Soit (Δ) la droite d'équation $2x - 3y + 5 = 0$ et $B(-3 ; 2)$. Déterminer l'équation de la droite (Δ') perpendiculaire à (Δ) et passant par B.

Exercice 3 : (3 points)

On considère le point $T(2 ; 5)$.

Déterminer les coordonnées du point E, projeté orthogonal de T sur la droite (d) d'équation cartésienne $2x - 3y + 5 = 0$.

Oui : ça tombe pas juste...

Exercice 4 : (3 points)

ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 4$ et $CA = 6$.

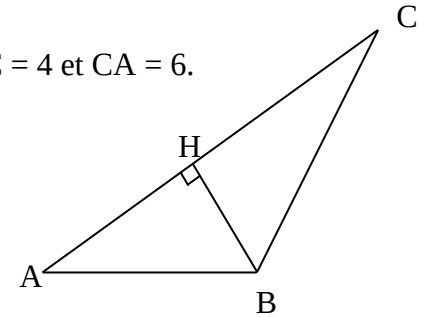
H est le pied de la hauteur issue de B.

1. Développer $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$.

2. En déduire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

3. En déduire HA.

Oui : ça tombe pas juste...



Exercice 5 : (1 point)

Soit m un nombre réel.

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\vec{u} \begin{pmatrix} m-4 \\ 2m+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2m \\ 3-m \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Bonus : (+1,5 points)

1. Pourquoi a-t-on commencé par compter par paquets de 5 ou de 10 ?
2. Pourquoi a-t-on fini par abandonner les chiffres romains ?
3. Comment appelle-t-on la numération actuelle, celle qui attribue à un même symbole une valeur différente suivant son emplacement ?
4. Dans cette numération, que caractérise le 0, plus pratique qu'un emplacement vide parfois ambigu ?
5. Quel mathématicien italien a importé le système décimal arabe en Europe ?
6. Vers quelle période (quel siècle) cela a-t-il eu lieu ?

MATHEMATIQUES N°9

Exercice 0 : (1 points)

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 12$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 - 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 17 = 0 \quad (1)$$

Exercice 1 : (9 points)

1. a. $2^2 + 5^2 - 7 \times 2 - 5 \times 5 + 10 = 4 + 25 - 14 - 25 + 10 = 0$

Donc A $\in$ C. (0,5)

b. $x^2 + y^2 - 7x - 5y + 10 = 0$

$$(x-3,5)^2 - 3,5^2 + (y-2,5)^2 + 2,5^2 + 10 = 0$$

$$(x-3,5)^2 + (y-2,5)^2 - 8,5 = 0$$

$$(x-3,5)^2 + (y-2,5)^2 = \sqrt{8,5}^2$$

Le centre est donc $\Omega(3,5 ; 2,5)$ et le rayon est $R = \sqrt{8,5}$. (1,75)

c. $B\Omega^2 = (3,5 - 6)^2 + (2,5 - 1)^2$

$$= (-2,5)^2 + 1,5^2$$

$$= 8,5$$

$$C\Omega^2 = (3,5 - 2)^2 + (2,5 - 0)^2$$

$$= 1,5^2 + 2,5^2$$

$$= 8,5$$

Donc $B\Omega = C\Omega = \sqrt{8,5}$. (1)

d. C est donc le centre du cercle circonscrit du triangle ABC. (0,5)

2. a. On a $d_1 \perp (AC)$.

Or $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2-2 \\ 0-5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

D'où $d_1 : 0x - 5y + c = 0$

De plus, B $\in d_1$ donc $-5 \times 1 + c = 0$

$$c = 5$$

On a donc $d_1 : -5y + 5 = 0$

$$5 = 5y$$

$$y = 1 \quad (1,5)$$

b. On doit résoudre $\begin{cases} y = 1 \\ -x + y + 2 = 0 \end{cases}$: ça va, c'est pas bien compliqué...

On a $-x + 1 + 2 = 0$ et donc $x = 3$.

H a donc pour coordonnées (3 ; 1). (0,75)

3. On doit résoudre $\begin{cases} x^2 + y^2 - 7x - 5y + 10 = 0 \\ -x + y + 2 = 0 \end{cases}$

On a par exemple $y = x - 2$ qu'on injecte dans L_1 :

$$x^2 + (x-2)^2 - 7x - 5(x-2) + 10 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 - 7x - 5x + 10 + 10 = 0$$

$$2x^2 - 16x + 24 = 0$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 12$$

$$= 64 - 48$$

$$= 16$$

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{8 - 4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{8 + 4}{2} = 6$$

$$y_1 = x_1 - 2 = 0 \quad \text{et} \quad y_2 = x_2 - 2 = 4$$

Les points d'intersection sont donc C(2 ; 0) et H'(6 ; 4). (3)

Exercice 2 : (3 points)

1° Vecteur directeur de (d) : $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Il est également directeur de la droite (d') : $x + 2y + c = 0$

On remplace avec les coordonnées de A :

$$3 + 2 \times (-1) + c = 0$$

$$3 - 2 + c = 0$$

$$c = -1$$

Donc (d') : $x + 2y - 1 = 0$ (1,5)

2° Vecteur normal de (Δ) : $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Il est directeur de (Δ') : $-3x - 2y + c = 0$

On remplace avec les coordonnées de B :

$$-3 \times (-3) - 2 \times 2 + c = 0$$

$$9 - 4 + c = 0$$

$$c = -5$$

Donc (Δ') : $-3x - 2y - 5 = 0$ (1,5)

Exercice 3 : (3 points)

Vecteur directeur de (d) : $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Il est normal à (TE) : $3x + 2y + c = 0$

Et avec T(2 ; 5) on obtient $3 \times 2 + 2 \times 5 + c = 0$

$$6 + 10 + c = 0$$

$$c = -16$$

Donc (TE) : $3x + 2y - 16 = 0$

E vérifie donc $\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + 2y - 16 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -5 & (\times 3) \\ 3x + 2y = 16 & (\times 2) \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} 6x - 9y = -15 \\ 6x + 4y = 32 \end{cases}$$

$$L_2 - L_1 : 13y = 47$$

$$y = \frac{47}{13}$$

$$L_1 : 2x - 3 \times \frac{47}{13} = -5$$

$$2x = -5 + \frac{141}{13} = \frac{76}{13}$$

$$x = \frac{76}{13} : 2 = \frac{38}{13}$$

E a pour coordonnées $\left(\frac{38}{13}; \frac{47}{13}\right)$ **3**

Exercice 4 : (3 points)

1. $(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$ **0,25**

2. $(\overrightarrow{BC})^2 = 3^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + 6^2$

$$4^2 = 9 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + 36$$

$$16 - 9 - 36 = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\frac{-29}{2} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -14,5$$
 1,25

3. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC}$ par projection orthogonale

$$-14,5 = -HA \times AC \text{ car les vecteurs sont colinéaires mais de sens opposés}$$

$$-14,5 = -HA \times 6$$

$$HA = \frac{-14,5}{-6} = \frac{29}{12}$$
 1,5

Exercice 5 : (1 points)

On doit avoir $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$(m - 4)(2m) + (2m + 1)(3 - m) = 0$$

$$2m^2 - 8m + 6m - 2m^2 + 3 - m = 0$$

$$-3m + 3 = 0$$

$$3 = 3m$$

$$1 = m$$

Bonus : (+1,5 points)

1. Car une main compte 5 doigts, et deux mains 10 doigts.

2. Ils nécessitaient trop de symboles différents et donnaient lieu à des calculs parfois trop compliqués (*une seule des deux réponses → accepté*)

3. La numération de position.

4. L'absence de quantité à un certain rang.

+0,25

5. Fibonacci

6. XII^{ème} / XIII^{ème} siècle