

MATHEMATIQUES N°8

Remarques : les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Chacun fait donc comme il le souhaite, mais il y aura tout de même un petit bonus pour celles et ceux qui commenceront par le dernier exercice.

Exercice 1 : (4 points)

1° Donner la liste $\mathcal{L}$ des nombres premiers inférieurs à 60.

2° Indiquer si les nombres suivants sont premiers, et justifier la réponse :

$$A = 667 \quad B = 52\,695 \quad C = 8\,571 \quad D = 461$$

Exercice 2 : (3,5 points)

On considère le nombre $c = a(b + 5)^2$ où a est un multiple de 4 et où b est divisible par 5. Lulu a l'impression qu'à chaque fois qu'il calcule c en respectant les consignes, le résultat se termine par « 00 ».

Peux-tu lui prouver que c'est normal ?

Exercice 3 : (2 points)

Montrer que si n est impair alors $n^2 - 1$ est un multiple de 4.

Exercice 4 : (4 points)

Etant donné un entier n supérieur ou égal à 10, on appelle associé de n l'entier obtenu en intercalant un 0 entre le chiffre des dizaines et celui des unités. Par exemple, l'associé de 5 467 est 54 607.

1° a. Quel est l'associé de 768 492 ?

b. Le nombre 2 009 est-il l'associé d'un nombre ? Si oui, lequel ?

c. Le nombre 2 019 est-il l'associé d'un nombre ? Si oui, lequel ?

2° Démontrer la propriété suivante : « Si n est un entier divisible par 9, alors son associé l'est également. »

3° « Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4. » Énoncer une condition portant sur n pour que son associé soit divisible par 4 et la démontrer.

Exercice 5 : (1,5 points)

1. Lors du dernier contrôle, le professeur annonce que la médiane est 9. Mathias a obtenu 11 et est donc content. Pourquoi ?

2. Le professeur annonce ensuite que la moyenne est 13, ce qui étonne Mathias. Comment est-ce possible ?

Exercice 6 : (1,5 points)

Le nombre $n^2 - n + 11$ est-il un nombre premier pour tout entier naturel n ?

Exercice 7 : (3,5 points)

Voici les notes obtenues par un élève :

Note	18	8	16	12
Coefficient	1	3	2	2

1. Calculer la moyenne de cet élève.

2. Calculer l'écart-type de cette série de notes par arrondi au centième près.

3. Lors du contrôle d'une classe, la moyenne des notes est 11 et l'écart-type est 1,5. Comment peut-on interpréter ces résultats ?

MATHEMATIQUES N°8

Bonus pour commencer par l'exercice 7

Exercice 1 : (4 points)

1° $\mathcal{L} = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59\}$ (1,5)

2° On peut vérifier que $667 = 23 \times 29$ donc il n'est pas premier. (0,75)

52 695 se termine par 5, donc est divisible par 5 : il n'est pas premier. (0,5)

$8 + 5 + 7 + 1 = 21$ donc 8 571 est dans la table de 3 : il n'est pas premier. (0,5)

$\sqrt{461} \approx 21,5$ et on peut vérifier que 461 n'est divisible par aucun nombre de $\mathcal{L}$ inférieur à 21. Donc 461 est premier. (0,75)

Exercice 2 : (3,5 points)

a est un multiple de 4 donc $a = 4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b est divisible par 5 donc $b = 5k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

D'où $c = a(b + 5)^2$

$$= 4k(5k' + 5)^2$$

$$= 4k(5(k' + 1))^2$$

$$= 4k \times 5^2(k' + 1)^2$$

$$= 4k \times 25(k' + 1)^2$$

$$= 100 \times k(k' + 1)^2$$

Donc c est dans la table de 100 : il se termine nécessairement par « 00 ». (2,5)

Exercice 3 : (2 points)

n est impair donc $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. (0,25)

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 - 1$$

$$= 4(k^2 + k)$$

Donc $n^2 - 1$ est un multiple de 4 car $(k^2 + k) \in \mathbb{Z}$. (1,75)

Exercice 4 : (4 points)

1° a. L'associé de 768 492 est 7 684 902 (0,5)

b. 2 009 est l'associé de 209. (0,5)

c. 2 019 n'est l'associé de personne car son chiffre des dizaines n'est pas 0... (0,5)

2° Si n est divisible par 9, alors la somme de ses chiffres est divisible par 9. Mais la somme des chiffres de son associé est la même car on a simplement ajouté un 0 dans l'écriture : l'associé est donc forcément divisible par 9. (1,25)

3° Sachant que le chiffre des dizaines de l'associé est 0, il faut que son chiffre des unités soit 4 ou 8 pour qu'il soit divisible par 4.

Ainsi, si le chiffre des unités de n est 0 ou 4, alors son associé sera divisible par 4. (1,25)

Exercice 5 : (1,5 points)

1. Mathias est content car il est au-dessus de la médiane : il fait donc partie de la meilleure moitié des élèves de sa classe. (0,5)

2. La moyenne est supérieure à la médiane : cela signifie que dans la moitié des élèves au-dessus de la médiane, il y a de très bonnes notes qui tirent la moyenne vers le haut (et probablement pas trop de très mauvaises notes par conséquent). (1)

Exercice 6 : (1,5 points)

Testons avec $n = 11$:

$$n^2 - n + 11 = 11^2 - 11 + 11 = 11^2$$

Bah... 11^2 n'est pas premier puisqu'il est dans la table de 11.

Donc $n^2 - n + 11$ n'est pas un nombre premier pour tout entier naturel n . (1,5)

Exercice 7 : (3,5 points)

$$1. \bar{x} = \frac{18 \times 1 + 8 \times 3 + 16 \times 2 + 12 \times 2}{1 + 3 + 2 + 2} = \frac{98}{8} = 12,25 \quad (0,75)$$

$$2. V = \frac{1(18 - 12,25)^2 + 3(8 - 12,25)^2 + 2(16 - 12,25)^2 + 2(12 - 12,25)^2}{1 + 3 + 2 + 2} = \frac{115,5}{8}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{115,5}{8}} \approx 3,80 \quad (2)$$

3. On peut estimer qu'il y a 68% des notes entre 9,5 et 12,5 et 95% des notes entre 8 et 14. C'est donc plutôt homogène... (0,75)