

MATHEMATIQUES N°7

Remarque : pas grand-chose au programme donc un contrôle plus court dont le coefficient sera probablement moindre... Une belle occasion de briller tout de même !

Exercice 1 : (4 points)

Cadeau pour celles et ceux qui ont bossé...

ABCD est un carré de côté a .

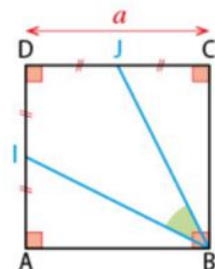
On note I le milieu de [AD] et J le milieu de [DC].

1. a. Montrer que $BI = BJ = a \frac{\sqrt{5}}{2}$

b. En déduire que $\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = \frac{5}{4} a^2 \cos(\widehat{IBJ})$

2. En décomposant les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{BJ}$, montrer que $\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = a^2$.

3. Déduire des questions 1. et 2. une valeur approchée de la mesure de $\widehat{IBJ}$ au dixième de degré près.



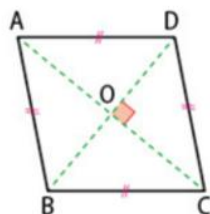
Exercice 2 : (4 points)

Soit ABCD un losange de centre O tel que $AC = 8$ et $BD = 6$.

1. Calculer la longueur du côté de ce losange.

2. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

3. Calculer $\vec{DA} \cdot \vec{CD}$.



Exercice 3 : (4 points)

Al Kashi avec second degré + 2 solutions et expliquer.

Dans le triangle TOC, on a $OC = \sqrt{313}$, $TO = 19$ et $\widehat{OTC} = 60^\circ$. Calculer TC au dixième près.

Bonus : (+0,75 points)

- Jusqu'au XV^e siècle, pourquoi certaines figures en perspective étaient-elles « impossibles » ?
- Quel artiste néerlandais dont le nom commence par un « E » a popularisé ces figures impossibles ?
- On peut rendre ces figures impossibles ... possibles, comme on peut le voir avec les photos des réalisations en Lego®. Mais comment est-ce possible ?
- Quelles sont les trois figures impossibles qui illustrent la dernière page de l'article ? En citer au minimum deux.

MATHEMATIQUES N°7

Remarque : pas grand-chose au programme donc un contrôle plus court dont le coefficient sera probablement moindre... Une belle occasion de briller tout de même !

Exercice 1 : (4 points)

Cadeau pour celles et ceux qui ont bossé...

ABCD est un carré de côté a .

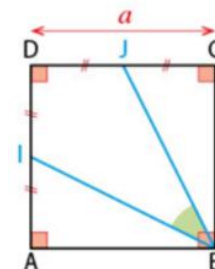
On note I le milieu de [AD] et J le milieu de [DC].

1. a. Montrer que $BI = BJ = a \frac{\sqrt{5}}{2}$

b. En déduire que $\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = \frac{5}{4} a^2 \cos(\widehat{IBJ})$

2. En décomposant les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{BJ}$, montrer que $\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = a^2$.

3. Déduire des questions 1. et 2. une valeur approchée de la mesure de $\widehat{IBJ}$ au dixième de degré près.



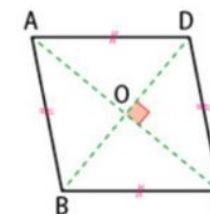
Exercice 2 : (4 points)

Soit ABCD un losange de centre O tel que $AC = 8$ et $BD = 6$.

1. Calculer la longueur du côté de ce losange.

2. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

3. Calculer $\vec{DA} \cdot \vec{CD}$.



Exercice 3 : (4 points)

Al Kashi avec second degré + 2 solutions et expliquer.

Dans le triangle TOC, on a $OC = \sqrt{313}$, $TO = 19$ et $\widehat{OTC} = 60^\circ$. Calculer TC au dixième près.

Bonus : (+0,75 points)

- Jusqu'au XV^e siècle, pourquoi certaines figures en perspective étaient-elles « impossibles » ?
- Quel artiste néerlandais dont le nom commence par un « E » a popularisé ces figures impossibles ?
- On peut rendre ces figures impossibles ... possibles, comme on peut le voir avec les photos des réalisations en Lego®. Mais comment est-ce possible ?
- Quelles sont les trois figures impossibles qui illustrent la dernière page de l'article ? En citer au minimum deux.

MATHEMATIQUES N°7

Exercice 1 : (4 points)

1. a. D'après le théorème de Pythagore :

$$BI^2 = BA^2 + AI^2$$

$$= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{5a^2}{4}$$

$$BI = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = a \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

Et $BI = BJ$ car les triangles BAI et BCJ sont parfaitement identiques.

b. $\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = BI \times BJ \times \cos(\widehat{IBJ})$

$$= BI^2 \times \cos(\widehat{IBJ})$$

$$= \frac{5a^2}{4} \cos(\widehat{IBJ}) \quad (0,5)$$

2. $\vec{BI} \cdot \vec{BJ} = (\vec{BA} + \vec{AI}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CJ})$

$$= \vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{BA} \cdot \vec{CJ} + \vec{AI} \cdot \vec{BC} + \vec{AI} \cdot \vec{CJ}$$

$$= 0 + BA \times CJ \times \cos 0 + AI \times BC \times \cos 0 + 0$$

$$= a \times \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \times a$$

$$= a^2 \quad (1,5)$$

3. On en déduit donc que $\frac{5a^2}{4} \cos(\widehat{IBJ}) = a^2$

$$\cos(\widehat{IBJ}) = a^2 : \frac{5a^2}{4} = \frac{4}{5}$$

$$\widehat{IBJ} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36,9^\circ \quad (1)$$

Exercice 2 : (4 points)

1. O est le milieu des diagonales. D'après Pythagore :

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$= 4^2 + 3^2$$

$$= 16 + 9$$

$$= 25$$

$$AB = \sqrt{25} = 5 \quad (1)$$

2. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = -\vec{BA} \cdot \vec{AD}$

$$= -\frac{1}{2}(BD^2 - BA^2 - AD^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(6^2 - 5^2 - 5^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(36 - 25 - 25)$$

$$= -\frac{1}{2} \times (-14) = 7 \quad (1,5)$$

3. $\vec{DA} \cdot \vec{CD} = \vec{CD} \cdot \vec{DA}$

$$= \frac{1}{2}(CA^2 - CD^2 - DA^2)$$

$$= \frac{1}{2}(8^2 - 5^2 - 5^2)$$

$$= \frac{1}{2}(64 - 25 - 25)$$

$$= \frac{1}{2} \times 14 = 7 \quad (1,5)$$

Exercice 3 : (4 points)

D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$OC^2 = TO^2 + TC^2 - 2 \times TO \times TC \times \cos \widehat{OTC}$$

$$\sqrt{313}^2 = 19^2 + TC^2 - 2 \times 19 \times TC \times \cos(60)$$

$$313 = 361 + TC^2 - 38 \times TC \times 0,5$$

$$0 = 361 + TC^2 - 19TC - 313$$

$$TC^2 - 19TC + 48 = 0 \quad (2,25)$$

$$\Delta = (-19)^2 - 4 \times 1 \times 48$$

$$= 361 - 192$$

$$= 169$$

$$x_1 = \frac{19 - \sqrt{169}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{19 - 13}{2}$$

$$= \frac{6}{2} = 3$$

$$= \frac{6}{2} = 3$$

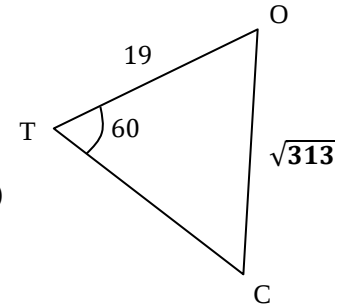
$$x_2 = \frac{19 + \sqrt{169}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{19 + 13}{2}$$

$$= \frac{32}{2}$$

$$= \frac{32}{2} = 16$$

On a donc deux possibilités : $TC = 3$ ou $TC = 16 \quad (1,75)$



Bonus : (+0,75 points)

1. Par ignorance des règles du dessin perspectif. (+0,125)

2. Escher (+0,125)

3. Il suffit de prendre la photo avec le bon angle de vue. (+0,125)

4. Le trident à deux dents, l'escalier à perpétuelle montée - ou descente (ou l'escalier impossible) et le tripoutre (ou triangle de Penrose, triangle impossible...)

(+0,125) pour deux de cités ou (+0,375) si les trois sont cités