

## MATHEMATIQUES N°8

Remarques : pour débiter 2025 en douceur... Rédaction propre et claire.

### Exercice 1 : (8 points)

1. Déterminer une primitive de chacun des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 5(4x - 7)^2 & f_2(x) &= 7e^{2-3x} \\ f_3(x) &= \frac{-3}{5\sqrt{7x+1}} & f_4(x) &= \frac{5x}{3x^2+1} & f_5(x) &= \frac{2}{(5x-2)^2} \end{aligned}$$

### Exercice 2 : (6 points)

L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence. Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane.

La concentration d'octane, en moles par litre (noté  $mol.L^{-1}$ ), dans la cuve est modélisée par une fonction  $f$  du temps  $t$ , exprimé en minutes.

On admet que cette fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  et qu'elle vérifie l'équation différentielle (E) :  $y' + 0,12y = 0,003$ .

1. a. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).  
b. A l'instant  $t = 0$ , la concentration d'octane dans la cuve est de  $0,5 mol.L^{-1}$ .  
Vérifier alors que  $f$  est définie par  $f(t) = 0,475e^{-0,12t} + 0,025$ .
2. Etudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$  et interpréter les résultats dans le contexte de cet exercice.
3. Déterminer à la minute près le temps nécessaire pour obtenir une concentration en octane dans la cuve inférieure à  $0,25 mol.L^{-1}$ .
4. a. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  et interpréter dans le contexte de cet exercice.  
b. Le processus de transformation de l'octane en iso-octane est arrêté au bout d'une heure. Expliquer ce choix.

### Exercice 3 : (3 points)

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\text{a. } 4 \sin x + 2\sqrt{3} < 0 \text{ sur } ]-\pi ; \pi] \quad \text{b. } 2 - 2\sqrt{2} \cos x \leq 0 \text{ sur } [0 ; 2\pi[$$

### Exercice 4 : (3 points)

On se propose de résoudre l'équation différentielle : (E) :  $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

1. Montrer que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = 2xe^{2x} + 1$  est solution de (E).
2. Résoudre l'équation (E') :  $y' - 2y = 0$
3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution  $f$  de (E) telle que  $f'(0) = 1$ .

### Bonus : (+1,75 points)

1. Quel est le titre de l'article ?
2. Comment appelle-t-on également le nombre d'or  $\Phi$  ?
3. De quelle équation du second degré est-il solution ?
4. Que vaut-il ?
5. Selon l'article, peut-on retrouver le nombre d'or dans le logo  ?
6. Finalement,  $\Phi$  définit surtout une forme de beauté « ésotérique ». Qu'est-ce que cela signifie ? (*ce mot apparaît plusieurs fois dans l'article...*)
7. Considérons le rectangle d'or. Notons  $x$  sa largeur et  $y$  sa longueur.  
L'égalité des rapports s'écrit  $\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x}$ . On note  $\Phi = \frac{y}{x}$ .  
A partir de là, indiquer les étapes permettant de retrouver l'équation du second degré dont  $\Phi$  est la solution positive.

Conclusion : la « beauté » du nombre d'or se trouve surtout dans les (formules) mathématiques...

# MATHEMATIQUES N°8

## Exercice 1 : (8 points)

$$f_1(x) = 5(4x - 7)^2$$

$$= 5 \times 4(4x - 7)^2$$

$$F_1(x) = \frac{5}{4} \times \frac{(4x - 7)^3}{3}$$

$$= \frac{5}{12}(4x - 7)^3 \quad (1,5)$$

$$f_3(x) = \frac{-3}{5\sqrt{7x+1}}$$

$$= \frac{-3}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{7}{2\sqrt{7x+1}}$$

$$F_3(x) = \frac{-3}{5} \times \frac{2}{7} \sqrt{7x+1}$$

$$= \frac{-6}{35} \sqrt{7x+1} \quad (1,75)$$

$$f_5(x) = \frac{2}{(5x-2)^2}$$

$$= \frac{-2}{5} \times \frac{-5}{(5x-2)^2}$$

$$F_5(x) = \frac{-2}{5} \times \frac{1}{5x-2}$$

$$= \frac{-2}{5(5x-2)} \quad (1,75)$$

## Exercice 2 : (6 points)

1. a.  $y' + 0,12y = 0,003$

$$y' = -0,12y + 0,003$$

D'où  $y = ce^{-0,12x} - \frac{0,003}{-0,12}$

$$= ce^{-0,12x} + 0,025 \quad (0,75)$$

b. Or,  $f(0) = 0,5$

$$ce^{-0,12 \times 0} + 0,025 = 0,5$$

$$ce^0 = 0,5 - 0,025$$

$$c = 0,475$$

Donc  $f(t) = 0,475e^{-0,12t} + 0,025 \quad (0,75)$

$$f_2(x) = 7e^{2-3x}$$

$$= \frac{7}{-3} \times (-3)e^{2-3x}$$

$$F_2(x) = \frac{-7}{3}e^{2-3x}$$

$$= \frac{-7}{3}e^{2-3x} \quad (1,5)$$

$$f_4(x) = \frac{5x}{3x^2+1}$$

$$= \frac{5}{6} \times \frac{6x}{3x^2+1}$$

$$F_4(x) = \frac{5}{6} \times \ln(3x^2+1)$$

$$= \frac{5}{6} \ln(3x^2+1) \quad (1,5)$$

$$2. f'(t) = 0,475e^{-0,12t} \times (-0,12)$$

$$= -0,057e^{-0,12t} < 0$$

$f$  est donc décroissante sur  $[0; +\infty[$ . (0,75)

La concentration d'octane dans la cuve ne cesse de diminuer. (0,25)

$$3. f(t) \leq 0,25$$

$$0,475e^{-0,12t} + 0,025 \leq 0,25$$

$$0,475e^{-0,12t} \leq 0,25 - 0,025$$

$$e^{-0,12t} \leq \frac{0,225}{0,475}$$

$$-0,12t \leq \ln \frac{0,225}{0,475}$$

$$t \geq \frac{\ln \frac{0,225}{0,475}}{-0,12}$$

$$t \geq 6,23 \dots$$

Il faut donc 7 minutes pour que la concentration devienne inférieure à 0,25. (2)

4. a.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0,025$  car  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,12t} = 0$  (0,5)

Plus le temps avance, et plus la concentration en octane s'approche de 0,025 mol. L<sup>-1</sup>. (0,25)

b.  $f(60) = 0,475e^{-0,12 \times 60} + 0,025 \approx 0,02535$

Après une heure, la concentration en octane est déjà très proche de sa limite : il ne sert pas à grand-chose de poursuivre le processus de transformation. (0,75)

## Exercice 3 : (3 points)

a.  $4 \sin x + 2\sqrt{3} < 0$

$$4 \sin x < -2\sqrt{3}$$

$$\sin x < \frac{-2\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin x < \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

A l'aide d'un cercle trigonométrique, on obtient alors :

$$x \in \left] \frac{-2\pi}{3}; \frac{-\pi}{3} \right[ \quad (1,5)$$

b.  $2 - 2\sqrt{2} \cos x \leq 0$

$$2 \leq 2\sqrt{2} \cos x$$

$$\frac{2}{2\sqrt{2}} \leq \cos x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x$$

$$x \in \left[ 0; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{7\pi}{4}; 2\pi \right[ \quad (1,5)$$

**Exercice 4 :** (3 points)

$$1. h'(x) = 2e^{2x} + e^{2x} \times 2 \times 2x \\ = 2e^{2x} + 4xe^{2x}$$

$$h'(x) - 2h(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2(2xe^{2x} + 1) \\ = 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 4xe^{2x} - 2 \\ = 2(e^{2x} - 1)$$

Donc  $h$  est solution de (E). **1**

$$2. y' - 2y = 0$$

$$y' = 2y$$

D'où  $y = ce^{2x}$  avec  $c \in \mathbb{R}$ . **0,25**

3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :

$$f(x) = ce^{2x} + 2xe^{2x} + 1 \text{ où } c \in \mathbb{R} \quad \mathbf{0,25}$$

$$4. \text{ On a } f'(x) = 2f(x) + 2(e^{2x} - 1)$$

$$f'(0) = 2f(0) + 2(e^{2 \times 0} - 1)$$

$$1 = 2(ce^{2 \times 0} + 2 \times 0 \times e^{2 \times 0} + 1) + 2(1 - 1)$$

$$1 = 2(c + 1)$$

$$1 = 2c + 2$$

$$1 - 2 = 2c$$

$$\frac{-1}{2} = c$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{-1}{2}e^{2x} + 2xe^{2x} + 1 \quad \mathbf{1,5}$$

**Bonus :** (+1,75 points)

1. « L'équation du beau. »

**+0,25**

2. La divine proportion

$$3. \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$4. \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

5. Oui : quand on cherche bien, on peut trouver le nombre d'or partout ! 😊

6. Esotérique : se dit d'un mode d'expression, d'une œuvre qui n'est compréhensible que des initiés. *Seuls les initiés peuvent donc retrouver le nombre d'or dans certains « standards » de beauté.*

$$7. \frac{y}{x} = \frac{x}{y-x} \text{ devient } \Phi = \frac{1}{\frac{y-x}{x}} = \frac{1}{\frac{y}{x} - \frac{x}{x}} = \frac{1}{\Phi - 1}$$

$$\text{D'où } \Phi(\Phi - 1) = 1 \text{ et donc } \Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$