

MATHEMATIQUES N°7

Remarques : Oui, j'ai oublié de mettre le bonus en ligne et personne ne m'a rien dit... sauf Thirsan, mais un peu tard. Total sur 20,5 pour « compenser ».

Exercice 1 : (3 points)

Résoudre l'inéquation $\ln(x-1) + \ln(x-2) \leq \ln(6)$

Exercice 2 : (4 points)

C'est un choc sans précédent : des élèves de Spécialité Terminale ont fini par se rendre compte que leur prof de maths n'était pas infailible ! 🤖 Ils ont pu établir qu'il lui arrive de se tromper, avec une probabilité de 0,025.

Déterminer le nombre de cours successifs auxquels un élève doit assister pour que la probabilité qu'il assiste à au moins une erreur dépasse 50%. *(personne ne dit qu'il la détectera...)*

On veillera à rédiger la solution.

Et en cas de blocage, on pourra se contenter de résoudre $0,5 \geq 0,975^n$ puisque c'est l'inéquation à laquelle on est supposé arriver...

Exercice 3 : (10,5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $B(1; 1; 2)$ et dont un vecteur normal est

$$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}_1$ normal au plan $\mathcal{P}_1$.
 - On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan. Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.
- Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.
 - On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \text{ où } t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$
 Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On considère le point $A(1; 1; 1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$. On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ .

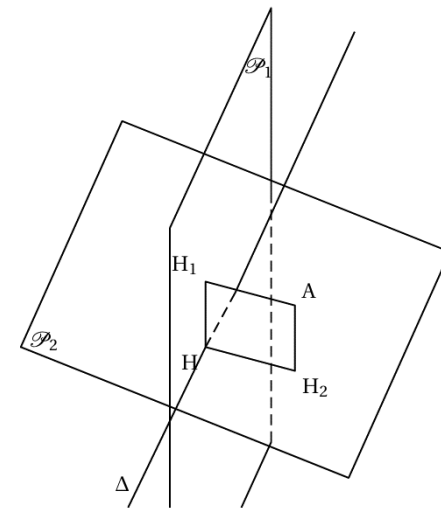
- On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0; -2 + t; t)$ où t désigne un nombre réel quelconque.
 - Montrer que, pour tout réel t , $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.
 - En déduire que $AH = \sqrt{3}$.
- On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.
 - En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3})$.

- Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3})$ et que H a pour coordonnées $(0; 0; 2)$.

Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1 , H_2 et H.

Démontrer que AH_1HH_2 est un rectangle.



Exercice 4 : (3 points)

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$.

- Déterminer la convexité de f sur $]0; +\infty[$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$

Bonus : (0,5 points)

Que signifie $3^{1,2}$?

MATHEMATIQUES N°7

Exercice 1 : (3 points)

Il faut que $x - 1 > 0$ et $x - 2 > 0$
 $x > 1$ et $x > 2$

Donc $x \in]2 ; +\infty[$ (0,5)

$$\begin{aligned} \ln(x-1) + \ln(x-2) &\leq \ln 6 &\Leftrightarrow \ln((x-1)(x-2)) &\leq \ln 6 \\ &&\Leftrightarrow (x-1)(x-2) &\leq 6 \\ &&\Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 - 6 &\leq 0 \\ &&\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) &x_1 &= \frac{3-5}{2} &x_2 &= \frac{3+5}{2} \\ &= 9 + 16 &&= \frac{-2}{2} = -1 &&= \frac{8}{2} = 4 \\ &= 25 &&&&& \end{aligned}$$

Donc $x \in [-1 ; 4]$.

Or, $x \in]2 ; +\infty[$ donc $S =]2 ; 4]$. (1,25)

Exercice 2 : (4 points)

Je note n le nombre de cours auquel un élève assiste et X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs faites par son prof de maths durant ces n cours. Les erreurs étant indépendantes les unes des autres, on peut dire que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n ; 0,025)$.

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &\geq 0,5 &\Leftrightarrow 1 - p(X = 0) &\geq 0,5 \\ &&\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} 0,025^0 \times 0,975^n &\geq 0,5 \\ &&\Leftrightarrow 1 - 0,975^n &\geq 0,5 \\ &&\Leftrightarrow 1 - 0,5 &\geq 0,975^n \\ &&\Leftrightarrow 0,5 &\geq 0,975^n \\ &&\Leftrightarrow \ln 0,5 &\geq n \ln 0,975 \\ &&\Leftrightarrow \frac{\ln 0,5}{\ln 0,975} &\leq n \text{ car } \ln 0,975 < 0 \\ &&\Leftrightarrow 27,4 &\leq n \end{aligned}$$

C'est à partir du 28^{ème} cours que la probabilité d'avoir assisté à au moins une erreur dépassera 50%. (1,5)

Exercice 3 : (10,5 points)

1. a. $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (0,25)

b. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \times 1 + 1 \times (-1) - 1 \times 1$
 $= 2 - 1 - 1$
 $= 0$

$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont donc orthogonaux, ce qui signifie que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires. (0,5)

2. a. $\mathcal{P}_2$ a pour vecteur normal $\vec{n}_2$ donc $\mathcal{P}_2 : 1x - 1y + 1z + d = 0$.

Or, $\mathcal{P}_2$ passe par B(1 ; 1 ; 2) donc $1 - 1 + 2 + d = 0$

$$d = -2$$

Donc $\mathcal{P}_2 : x - y + z - 2 = 0$. (1)

b. Soit M un point de Δ . On a donc M(0 ; -2 + t ; t).

D'une part, $2 \times 0 + (-2 + t) - t + 2 = 0$ donc M $\in \mathcal{P}_1$.

D'autre part, $0 - (-2 + t) + t - 2 = 2 - t + t - 2 = 0$ donc M $\in \mathcal{P}_2$.

Ainsi, tout point de Δ appartient à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$: la droite Δ est donc bien l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. (1,25)

$$\begin{aligned} 3. a. AM_t^2 &= (0 - 1)^2 + (-2 + t - 1)^2 + (t - 1)^2 \\ &= 1 + (-3 + t)^2 + t^2 - 2t + 1 \\ &= 1 + 9 - 6t + t^2 + t^2 - 2t + 1 \\ &= 2t^2 - 8t + 11 \end{aligned}$$

Donc $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$ (1)

b. H étant le projeté orthogonal de A sur Δ , la longueur AH est donc la longueur minimale de AM_t .

On cherche donc le minimum de $\sqrt{2t^2 - 8t + 11}$, et donc celui de $2t^2 - 8t + 11$.

Celui-ci est atteint lorsque $t = \frac{-(-8)}{2 \times 2} = 2$.

(et si tu avais oublié, bah tu pouvais dériver, faire le tableau de variations...)

$$\begin{aligned} \text{D'où } AH &= \sqrt{2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 11} \\ &= \sqrt{8 - 16 + 11} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

4. a. $\vec{n}_1$ est normal à $\mathcal{P}_1$ donc directeur de $\mathcal{D}_1$.

Donc $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$. (1)

b. H₁ est le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{P}_1$. Ses coordonnées vérifient donc :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

D'où $2(1 + 2t) + (1 + t) - (1 - t) + 2 = 0$

$$2 + 4t + 1 + t - 1 + t + 2 = 0$$

$$6t + 4 = 0$$

$$6t = -4$$

$$t = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = 1 + 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} \\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Le point H_1 a donc pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. **(2)**

$$5. \overrightarrow{AH_1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - 1 \\ \frac{1}{3} - 1 \\ \frac{5}{3} - 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AH_1} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{H_2H} \begin{pmatrix} 0 - \frac{4}{3} \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 2 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{H_2H} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AH_1} = \overrightarrow{H_2H}$ donc AH_1HH_2 est un parallélogramme.

De plus, H_2 le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}_2$ donc (AH_2) est orthogonale à $\mathcal{P}_2$ et donc à toutes les droites de $\mathcal{P}_2$. En particulier, (AH_2) est orthogonale (HH_2) .

Le parallélogramme AH_1HH_2 a donc un angle droit : c'est un rectangle. **(2)**

Exercice 4 : (3 points)

$$1. f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{x^2} < 0$$

Donc f est concave sur $]0; +\infty[$. **(1,25)**

2. f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ car $f'(x) > 0$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x - 2 + \frac{1}{2} \ln x = -\infty < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 + \frac{1}{2} \ln x = +\infty > 0.$$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $]0; +\infty[$. **(1,75)**

Bonus : (0,5 points)

$$3^{1,2} = e^{1,2 \ln 3} \quad \mathbf{+0,5}$$