

MATHEMATIQUES N°6.2

Exercice 1 : (4 points)

1. Sachant que $\cos x = -0,2$ et que $x \in [-\pi ; 0[$, déterminer la valeur de $\sin x$.
2. Déterminer $\cos\left(\frac{-274\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{-274\pi}{6}\right)$

Exercice 2 : (6 points)

1. Lors de son premier contrôle, un élève a obtenu 8/20. Mais il n'a rien lâché et ses notes augmentent de 10% à chaque contrôle. On note u_n sa note au $n^{\text{ème}}$ contrôle.
 - a. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?
 - b. Exprimer u_n en fonction de n .
 - c. Calculer la note qu'il a obtenue au 9^{ème} contrôle de l'année à 10^{-2} près.
2. Calculer $S = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{5}{2048}$

Veiller à détailler la résolution et donner la réponse finale sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 3 : (10 points)

En 2010, une forêt vieillissante possède 50 000 arbres. Afin de l'entretenir, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

- 0° Calculer le nombre d'arbres en 2011 puis en 2012.
- 1° On note u_n le nombre d'arbres de cette forêt, en milliers, au cours de l'année $(2010 + n)$. Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$ (rédiger, expliquer...)
- 2° On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 60$
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.
 - b. Calculer v_0 . Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 60 - 10 \times 0,95^n$
- 3° Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2020. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
- 4° Sans justification, déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres qu'elle comptait en 2010.
- 5° Conjecturer l'évolution du nombre d'arbres de la forêt à long terme.

Bonus : (+1,25 points)

1. Quel mathématicien italien a introduit la notation folle $\sqrt{-1}$?
2. Quelle notation Euler proposa-t-il bien plus tard pour remplacer $\sqrt{-1}$?
3. Que vaut i^2 ?
4. Quel mathématicien proposa le nom « complexe » pour ces nouveaux nombres ?
5. Que valent x_1 et x_2 lorsque $\Delta < 0$?

MATHEMATIQUES N°6.2

Exercice 1 : (4 points)

1. Sachant que $\cos x = -0,2$ et que $x \in [-\pi ; 0[$, déterminer la valeur de $\sin x$.
2. Déterminer $\cos\left(\frac{-274\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{-274\pi}{6}\right)$

Exercice 2 : (6 points)

1. Lors de son premier contrôle, un élève a obtenu 8/20. Mais il n'a rien lâché et ses notes augmentent de 10% à chaque contrôle. On note u_n sa note au $n^{\text{ème}}$ contrôle.
 - a. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?
 - b. Exprimer u_n en fonction de n .
 - c. Calculer la note qu'il a obtenue au 9^{ème} contrôle de l'année à 10^{-2} près.
2. Calculer $S = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{5}{2048}$

Veiller à détailler la résolution et donner la réponse finale sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 3 : (10 points)

En 2010, une forêt vieillissante possède 50 000 arbres. Afin de l'entretenir, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

- 0° Calculer le nombre d'arbres en 2011 puis en 2012.
- 1° On note u_n le nombre d'arbres de cette forêt, en milliers, au cours de l'année $(2010 + n)$. Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$ (rédiger, expliquer...)
- 2° On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 60$
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.
 - b. Calculer v_0 . Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 60 - 10 \times 0,95^n$
- 3° Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2020. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
- 4° Sans justification, déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres qu'elle comptait en 2010.
- 5° Conjecturer l'évolution du nombre d'arbres de la forêt à long terme.

Bonus : (+1,25 points)

1. Quel mathématicien italien a introduit la notation folle $\sqrt{-1}$?
2. Quelle notation Euler proposa-t-il bien plus tard pour remplacer $\sqrt{-1}$?
3. Que vaut i^2 ?
4. Quel mathématicien proposa le nom « complexe » pour ces nouveaux nombres ?
5. Que valent x_1 et x_2 lorsque $\Delta < 0$?

MATHEMATIQUES N°5

Exercice 1 : (4 points)

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a : } (\cos x)^2 + (\sin x)^2 &= 1 \\ (-0,2)^2 + (\sin x)^2 &= 1 \\ 0,04 + (\sin x)^2 &= 1 \\ (\sin x)^2 &= 1 - 0,04 \\ (\sin x)^2 &= 0,96 \end{aligned}$$

Or, $x \in [-\pi ; 0[$ donc $\sin x \leq 0$.

D'où $\sin x = -\sqrt{0,96}$.

(2)

$$2. -274 = -23 \times 12 + 2$$

$$\text{D'où } \frac{-274}{6} = -23 \times 2\pi + \frac{2\pi}{6} = -23 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Ainsi, on a } \begin{cases} \cos\left(\frac{-274\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{-274\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(2)

Exercice 2 : (6 points)

1. a. (u_n) est géométrique de raison 1,1 et de 1^{er} terme $u_1 = 8$.

$$\text{b. } u_n = 8 \times 1,1^{n-1}$$

$$\text{c. } u_9 = 8 \times 1,1^{9-1} \approx 17,15$$

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 5$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$.

$$\text{On a alors } v_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{On constate que } \frac{5}{2048} = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = v_{12}$$

$$S = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{12}$$

$$= 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{2}} = 5 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{12}}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 5 \times \frac{2}{1} \left(\frac{2^{12}}{2^{12}} - \frac{1}{2^{12}} \right) = 10 \left(\frac{2^{12} - 1}{2^{12}} \right)$$

$$= 10 \left(\frac{4095}{4096} \right)$$

$$= \frac{20475}{2048}$$

(2)

Exercice 3 : (10 points)

0° En 2011, il y aura $50\,000 \times 0,95 + 3\,000 = 50\,500$ arbres.

Et en 2012, il y en aura $50\,500 \times 0,95 + 3\,000 = 50\,975$

(1)

1° $u_0 = 50$ car cela correspond aux 50 000 arbres de l'année 2010.

$0,95u_n$ correspond à une baisse de 5% du nombre d'arbres.

Et + 3 correspond aux 3 000 arbres plantés chaque année.

(1,5)

$$2^\circ \text{ a. } v_{n+1} = u_{n+1} - 60$$

$$= 0,95u_n + 3 - 60$$

$$= 0,95(v_n + 60) - 57$$

$$= 0,95v_n + 57 - 57$$

$$= 0,95v_n$$

(v_n) est donc bien une suite géométrique de raison 0,95.

(2,5)

$$\text{b. } v_0 = u_0 - 60$$

$$= 50 - 60 = -10$$

$$\text{D'où } v_n = -10 \times 0,95^n$$

(1)

$$\text{c. Or, } v_n = u_n - 60$$

$$\text{Donc } u_n = v_n + 60$$

$$= -10 \times 0,95^n + 60$$

(0,5)

3° En 2020, on a $n = 10$.

$$u_{10} = 60 - 10 \times 0,95^{10}$$

$$\approx 54,013$$

En 2020, la forêt comptera donc environ 54 013 arbres.

(1)

4° Il faut donc dépasser $50\,000 \times 1,10 = 55\,000$ arbres.

La calculatrice indique que c'est pour $n = 14$ donc en 2024.

(1,25)

5° On sait que $u_n = 60 - 10 \times 0,95^n$. Or, $0,95^n$ va devenir de plus en plus petit lorsque n devient grand, en s'approchant de 0. Ainsi, les valeurs de u_n vont s'approcher de 60.

Autrement dit, après un très grand nombre d'années, le nombre d'arbre de la forêt va petit à petit s'approcher de 60 000 mais ne dépassera jamais ce nombre.

(1,25)

Bonus : (+1,25 points)

1. Rafael Bombelli

2. Euler proposa i pour remplacer $\sqrt{-1}$.

(+0,25)

3. i^2 vaut -1 .

4. C'est Gauss qui a introduit le nom de « complexe ».

$$5. \text{ On a alors } x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$