

Bac Blanc, Lycée Arago, Samedi 1^{er} février 2025

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.

Pour éviter aux correcteurs de s'arracher les cheveux, la calculatrice est autorisée.

La présentation et la rédaction pourront être sanctionnées jusqu'à 1 point.

*** Indiquer en début de copie le nom de votre prof de maths ***

A préciser : M Domercq (lundi) – M Domercq (vendredi)

EXERCICE 1 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$$

- Démontrer que $u_1 = 12$.
 - Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
 - À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :
$$u_n \geq n + 1$$
 - En déduire la limite de la suite (u_n) .
- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$v_n = u_n - n - 1$$
 - Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0 .
 - En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
 - En déduire que pour tout entier naturel n :
$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1$$
 - En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.
 - Recopier et compléter les deux lignes aux instructions manquantes.
 - Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

u reçoit 3
n reçoit 0
Tant que
 u reçoit
 n reçoit n+1
Fin du Tant que
Afficher n

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x ,

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

- Étudier les variations de la fonction g .
 - Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x ,

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- Démontrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- Démontrer que, pour tout $x > 1$: $1 < x < x^2 < x^3$.
 - En déduire que, pour $x > 1$: $0 < f(x) < 4x^3 e^{-2x+1}$.
 - On note C_f la courbe représentative de f . En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
- Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 1)e^{-2x+1}$.
- À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 (3,5 points)

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et **la lettre** correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

- Une équipe sportive doit choisir deux capitaines parmi 36 joueurs. Combien de binômes différents peut-on former ?
 - 630
 - 720
 - 1296
 - 1260

2. Un quiz en ligne comporte 10 questions, avec 4 réponses possibles pour chacune. Combien de façons différentes y a-t-il de répondre au quiz sans aucune réponse juste si une seule réponse est correcte à chaque question ?

a. 4^{10} b. 3^{10} c. 10^4 d. 10^3

3. Un étudiant prépare un itinéraire pour visiter 5 musées dans une ville, chacun devant être visité une seule fois. Combien de parcours différents peuvent être envisagés si l'un des musées doit obligatoirement être visité en dernier ?

a. 24 b. 120 c. 48 d. 47

4. Un club de lecture de 12 personnes organise un événement spécial. Ils doivent tout d'abord choisir 3 personnes pour préparer les livres puis choisir ensuite 2 autres personnes parmi les membres restants pour organiser les discussions. Le nombre de manières de former ces deux groupes est :

a. 256 b. 7920 c. 5544 d. 220

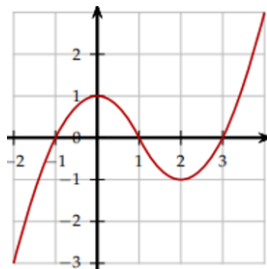
5. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2 ; 2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ est donné ci-dessous. La fonction f est :

- a. convexe sur $[-2 ; -1]$.
b. concave sur $[0 ; 1]$.
c. convexe sur $[-1 ; 2]$.
d. concave sur $[-2 ; 0]$.

x	-2	-1	0	2
variations de f'	1	0	-2	-1

6. On donne ci-dessous la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie sur $[-2 ; 4]$:

- a. f est décroissante sur $[0 ; 2]$.
b. f est décroissante sur $[-1 ; 0]$.
c. f admet un maximum en 1 sur $[0 ; 2]$.
d. f admet un maximum en 3 sur $[2 ; 4]$



7. Les vecteurs $\vec{u}(2 ; 0 ; 2)$, $\vec{v}(2 ; 2 ; 0)$ et $\vec{w}$ ne forment pas une base lorsque :

- a. $\vec{w}(3 ; -4 ; 6)$ c. $\vec{w}(1 ; -3 ; 4)$
b. $\vec{w}(2 ; 2 ; 1)$ d. $\vec{w}(2 ; -2 ; 3)$

EXERCICE 4 (6 points)

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.

Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».

a. Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $p_B(G)$.

b. On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à 0,3. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

2. a. Montrer que $p(G) = 0,4$.

b. Un joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?

3. Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.

4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

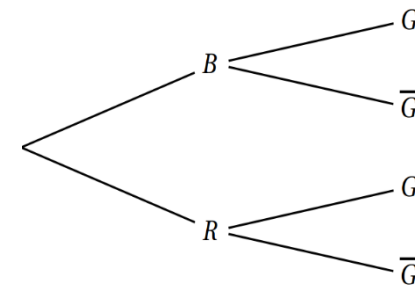
b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.

c. Calculer $p(X > 4)$ arrondie à 10^{-3} près. Donner une interprétation du résultat obtenu.

5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ».

a. Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.

b. A l'aide de la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à 0,99.



EXERCICE 1 (5 points)

1. a.

$$u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 0 - 3 = 15 - 3 = 12$$

0,25

b.

$$u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = 53$$

0,25

c. Il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

0,25

2. a. Soit P_n la proposition $u_n \geq n + 1$.

Initialisation : $u_0 = 3$ et $0 + 1 = 1$.

$3 \geq 1$. La proposition est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose la proposition vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$ (hypothèse de récurrence).

On va vérifier qu'alors elle est vraie au rang suivant.

$$\begin{aligned} u_n \geq n + 1 &\iff 5u_n \geq 5(n + 1) \\ &\iff 5u_n - 4n - 3 \geq 5n + 5 - 4n - 3 \\ &\iff u_{n+1} \geq n + 2 = (n + 1) + 1 \end{aligned}$$

1

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : la proposition P_n est vérifiée au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n : $u_n \geq n + 1$.

b. On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$. Puisque $u_n \geq n + 1$, par comparaison, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

0,5

3. a.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n + 1) - 1 \\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1 \\ &= 5u_n - 5n - 5 \\ &= 5(u_n - n - 1) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

0,75

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$.

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 2$, on a :

$$v_n = 2 \times 5^n$$

0,25

c. $v_n = u_n - n - 1 \iff u_n = v_n + n + 1$. Donc :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1$$

0,25

d. Puisque $5 > 1$, la suite de terme général 5^n est strictement croissante, donc $5^{n+1} \geq 5^n$.

$$\begin{aligned} 5^{n+1} \geq 5^n &\iff 2 \times 5^{n+1} \geq 2 \times 5^n \\ &\iff 2 \times 5^{n+1} + (n + 1) + 1 \geq 2 \times 5^n + (n + 1) + 1 \\ &\iff u_{n+1} \geq 2 \times 5^n + n + 2 \\ &\iff u_{n+1} \geq 2 \times 5^n + n + 1 \\ &\iff u_{n+1} \geq u_n \end{aligned}$$

0,5

La suite (u_n) est donc croissante.

4. a.

```
def suite():
    u=3
    n=0
    while u<10**7:
        u= 5*u-4*n-3
        n=n+1
    return n
```

On accepte 10^7 au lieu de 10^{**7}

0,5

b.

u	n	u < 10 ⁷
3	0	VRAI
12	1	VRAI
53	2	VRAI
254	3	VRAI
1 255	4	VRAI
6 256	5	VRAI
31 257	6	VRAI
156 258	7	VRAI
781 259	8	VRAI
3 906 260	9	VRAI
19 531 261	10	FAUX

La valeur renvoyée par cette fonction est $n = 10$. C'est le rang à partir duquel $u_n \geq 10^7$

0,5

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A

1. a. $g'(x) = -6x^2 + 2x$
 $= x(2 - 6x)$
 $x = 0$ ou $2 - 6x = 0$
 $2 = 6x$
 $\frac{2}{6} = x$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	-
$g(x)$				

(0,75)

b. On utilise les monômes de plus haut degré :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty$ (0,5)

2. Sur $[0 ; +\infty[$ le maximum de $g(x)$ est $\frac{-26}{27} < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution. (0,25)

Sur $] -\infty ; 0]$, g est continue et strictement décroissante.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty > 0$ et $g(0) = -1 < 0$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -\infty ; 0]$ (0,75)

On obtient $\alpha \approx -0,66$. (0,25)

3.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(0,5)

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 1 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x+1} = +\infty$

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x + x^2 + x^3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ par produit. (0,25)

2. a. Soit $x > 1$. Autrement dit, $1 < x$.

Si on multiplie par $x > 1$ donc positif, on obtient $x < x^2$.

Et si on recommence, on obtient $x^2 < x^3$.

Donc pour tout $x > 1$: $1 < x < x^2 < x^3$. (0,5)

b. D'après a. on a $1 + x + x^2 + x^3 < x^3 + x^3 + x^3 + x^3$

$$1 + x + x^2 + x^3 < 4x^3$$

En multipliant par e^{-2x+1} , on obtient $f(x) < 4x^3 e^{-2x+1}$.

De plus, $f(x)$ est le produit de deux termes positifs car $x > 0$.

D'où pour $x > 1$: $0 < f(x) < 4x^3 e^{-2x+1}$ (0,5)

c. $4x^3 e^{-2x+1} = 4x^3 e^{-2x} e^1$
 $= 4e^1 \frac{x^3}{e^{2x}} = \frac{4e}{2^3} \times \frac{(2x)^3}{e^{2x}}$
 $= \frac{e}{2} \times \frac{X^3}{e^X}$ en posant $X = 2x$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e}{2} \times \frac{X^3}{e^X} = 0$ par croissances comparées. (0,75)

On observe une asymptote horizontale d'équation $x = 0$ (0,25)

3. $f'(x) = (1 + 2x + 3x^2)e^{-2x+1} + (1 + x + x^2 + x^3)e^{-2x+1} \times (-2)$
 $= e^{-2x+1}(1 + 2x + 3x^2 - 2(1 + x + x^2 + x^3))$
 $= e^{-2x+1}(1 + 2x + 3x^2 - 2 - 2x - 2x^2 - 2x^3)$
 $= e^{-2x+1}(-2x^3 + x^2 - 1)$ (0,5)

4. On remarque que $f'(x) = e^{-2x+1}g(x)$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. D'où :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

(0,25)

EXERCICE 3 (3,5 points)

1. a (0,5)
2. b (0,5)
3. a (0,5)
4. b (0,5)
5. d (0,5)
6. c (0,5)
7. c (0,5)

EXERCICE 4 (6 points)

1. R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».

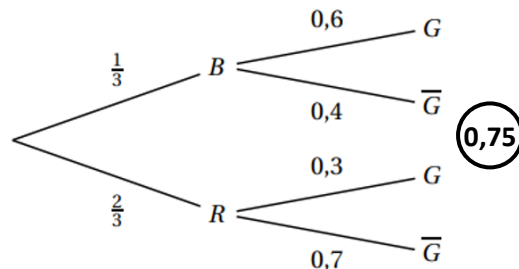
a. Si la case est blanche on tire 1 seul jeton; comme il y a 3 résultats impairs sur 5 numéros on a $P_B(G) = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$. (0,5)

b. Tout d'abord on a $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et donc $P(R) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Si la case est rouge on tire successivement deux jetons : il y a $5 \times 4 = 20$ issues différentes depuis 1-2 jusqu'à 5-4 et parmi celles-ci les issues gagnantes : 1-3; 1-5; 3-1; 3-5; 5-1 et 5-3.

On a donc $P_R(G) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$ (voir l'énoncé).

On peut donc compléter l'arbre pondéré :



2. a. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G)$$

$$\bullet P(B \cap G) = P(B) \times P_B(G) = \frac{1}{3} \times 0,6 = \frac{0,6}{3} = 0,2;$$

$$\bullet P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = \frac{2}{3} \times 0,3 = \frac{0,6}{3} = 0,2. \quad (0,75)$$

$$\text{Donc } P(G) = 0,2 + 0,2 = 0,4.$$

$$\text{b. Il faut trouver } P_G(B) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{2}{4} = 0,5. \quad (0,75)$$

$$3. \bullet P(B) \times P(G) = \frac{1}{3} \times 0,4 = \frac{0,4}{3} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15};$$

$$\bullet P(B \cap G) = \frac{1}{3} \times 0,6 = 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Donc $P(B) \times P(G) \neq P(B \cap G)$: les évènements ne sont pas indépendants. (0,75)

4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Les 10 épreuves sont indépendantes et à chacune la probabilité de gagner est égale à 0,4. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,4)$. (0,5)

b. On a $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times (1 - 0,4)^7 \approx 0,215$ au millième près. (0,5)

c. $p(X > 4) = p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) \approx 0,367$

Il y a environ 37% de chances de gagner au moins 5 parties. (0,5)

5. a. On a $p_n = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,6^n$. (0,5)

b. Il faut trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,99$, soit :

Il faut jouer au moins 10 parties pour cela. (0,5)