

MATHEMATIQUES N°5

Remarques : pour débiter 2025 en douceur... Rédaction propre et claire.

Exercice 1 : (12 points)

On considère la fonction C donnant le coût total de production en euros en fonction du nombre de tonnes d'acier produites par jour.

Elle est définie sur $[0 ; 18]$ par $C(x) = -2x^3 + 49,5x^2 - 265x + 500$

On suppose que, chaque jour, tout l'acier est vendu, au prix de 80 € la tonne.

- a. Calculer la recette, en euros, réalisée pour la vente de 11 tonnes d'acier.
b. On appelle $R(x)$ la recette, en euros, réalisée pour la vente de x tonnes d'acier. Déterminer l'expression de $R(x)$ en fonction de x .
- On appelle $B(x)$ le bénéfice (en €) réalisé pour la vente de x tonnes d'acier.
a. Justifier que $B(x) = 2x^3 - 49,5x^2 + 345x - 500$
b. Déterminer le tableau de variations complet de la fonction B .
- a. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $B(x) = 0$. (démontrer...)
b. Donner des valeurs approchées de ces solutions à 0,01 près.
c. Déterminer le signe de $B(x)$. Interpréter.
- Pour avoir un bénéfice de 1 000 €, quelle quantité minimale d'acier au kilo près faut-il produire par jour ? On expliquera la démarche suivie.

Exercice 2 : (8 points)

- Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de l'espace ?
- On considère le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
Démontrer que les points A, B, E et C sont coplanaires.
- Déterminer x pour que les points R(-1 ; x ; -2), S(3 ; 5 ; 1) et T(19 ; 1 ; 13) soient alignés.
- On sait que $\vec{IJ}$ et $\vec{KL}$ sont colinéaires : que peut-on en déduire pour les points I, J, K et L ?

Bonus : (+1 points)

- Dans le problème posé par Léonard de Pise, on trouve une histoire de lapins. Mais à l'origine, quels animaux trouvait-on dans ce problème ?
- Quelle est la relation de récurrence qui définit la suite de Fibonacci ?
- Compléter la suite de Fibonacci : 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – ...
- Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$?

MATHEMATIQUES N°5

Remarques : pour débiter 2025 en douceur... Rédaction propre et claire.

Exercice 1 : (12 points)

On considère la fonction C donnant le coût total de production en euros en fonction du nombre de tonnes d'acier produites par jour.

Elle est définie sur $[0 ; 18]$ par $C(x) = -2x^3 + 49,5x^2 - 265x + 500$

On suppose que, chaque jour, tout l'acier est vendu, au prix de 80 € la tonne.

- a. Calculer la recette, en euros, réalisée pour la vente de 11 tonnes d'acier.
b. On appelle $R(x)$ la recette, en euros, réalisée pour la vente de x tonnes d'acier. Déterminer l'expression de $R(x)$ en fonction de x .
- On appelle $B(x)$ le bénéfice (en €) réalisé pour la vente de x tonnes d'acier.
a. Justifier que $B(x) = 2x^3 - 49,5x^2 + 345x - 500$
b. Déterminer le tableau de variations complet de la fonction B .
- a. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $B(x) = 0$. (démontrer...)
b. Donner des valeurs approchées de ces solutions à 0,01 près.
c. Déterminer le signe de $B(x)$. Interpréter.
- Pour avoir un bénéfice de 1 000 €, quelle quantité minimale d'acier au kilo près faut-il produire par jour ? On expliquera la démarche suivie.

Exercice 2 : (8 points)

- Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de l'espace ?
- On considère le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
Démontrer que les points A, B, E et C sont coplanaires.
- Déterminer x pour que les points R(-1 ; x ; -2), S(3 ; 5 ; 1) et T(19 ; 1 ; 13) soient alignés.
- On sait que $\vec{IJ}$ et $\vec{KL}$ sont colinéaires : que peut-on en déduire pour les points I, J, K et L ?

Bonus : (+1 points)

- Dans le problème posé par Léonard de Pise, on trouve une histoire de lapins. Mais à l'origine, quels animaux trouvait-on dans ce problème ?
- Quelle est la relation de récurrence qui définit la suite de Fibonacci ?
- Compléter la suite de Fibonacci : 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – ...
- Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$?

MATHEMATIQUES N°5

Exercice 1 : (12 points)

1. a. La recette pour 11 tonnes d'acier est $11 \times 80 = 880$ €. (0,25)

b. $R(x) = 80x$ (0,5)

2. a. $B(x) = R(x) - C(x)$
 $= 80x - (-2x^3 + 49,5x^2 - 265x + 500)$
 $= 80x + 2x^3 - 49,5x^2 + 265x - 500$
 $= 2x^3 - 49,5x^2 + 345x - 500$ (0,75)

b. $B'(x) = 6x^2 - 99x + 345$

$\Delta = (-99)^2 - 4 \times 6 \times 345$
 $= 9\,801 - 8\,280$
 $= 1\,521$

D'où : $x_1 = \frac{99 - \sqrt{1\,521}}{2 \times 6} = \frac{99 - 39}{12} = 5$ et $x_2 = \frac{99 + \sqrt{1\,521}}{2 \times 6} = \frac{99 + 39}{12} = 11,5$

x	0	5	11,5	18
B'(x)	+	0	0	+
B(x)	-500	237,5	-37,125	1 336

3. a. Sur $[0 ; 5]$, B est continue et strictement croissante.

$B(0) = -500 < 0$ et $B(5) = 237,5 > 0$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; 5]$. (2)

De même, $B(x) = 0$ admet une solution unique sur $[5 ; 11,5]$ et sur $[11,5 ; 18]$.

On a donc trois solutions sur $[0 ; 18]$. (0,75)

b. $x_1 \approx 1,95$ (0,5) $x_2 = 10$ (0,25) $x_3 \approx 12,80$ (0,5)

c.

x	0	x_1	10	x_3	18
B(x)	-	0	+	0	+

Le bénéfice est positif entre 1,95 et 10 tonnes, puis entre 12,8 et 18 tonnes. (0,5)

⇒ si on veut être rigoureux, pour 1,95 tonnes, le bénéfice est encore négatif : il faut donc 1,96 tonnes pour avoir un bénéfice positif. Et pour 12,8 tonnes, pas de soucis en revanche : le bénéfice est positif.

4. Il faut donc résoudre $B(x) = 1\,000$.

D'après le théorème de la bijection, l'unique solution α de cette équation se trouve entre 11,5 et 18. Et la calculatrice nous donne $17,278 < \alpha < 17,279$.

Sauf que, pour que le bénéfice dépasse 1 000 € il faut obligatoirement prendre 17,279 tonnes (ou 17 279 kg) car la fonction est croissante ! (2,5)

Exercice 2 : (8 points)

1. Cherchons par exemple a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$$\begin{cases} 2 = 0 + 5b \\ -6 = 4a + b \\ 0 = -5a + 3b \end{cases}$$

$L_1: \frac{2}{5} = b = 0,4$

$L_2: -6 = 4a + 0,4$

$-6 - 0,4 = 4a$

$\frac{-6,4}{4} = a$ et donc $a = -1,6$

Vérifions la troisième équation : $-5a + 3b = -5 \times (-1,6) + 3 \times 0,4 = 9,2 \neq 0$ (3)

Les vecteurs ne sont donc pas coplanaires et forment donc une base de l'espace.

2. On a $\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CD} - \frac{1}{2}\vec{BD}$
 $= \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{DB}$
 $= \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{CB}$ (1,5)

Les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AE}$ et $\vec{CB}$ sont coplanaires, et donc les points A, B, E et C aussi.

3. Pour que les points soient alignés, il faut que $\vec{SR}$ et $\vec{ST}$ soient colinéaires (par exemple).

$\vec{SR} \begin{pmatrix} -1-3 \\ x-5 \\ -2-1 \end{pmatrix} \vec{SR} \begin{pmatrix} -4 \\ x-5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{ST} \begin{pmatrix} 19-3 \\ 1-5 \\ 13-1 \end{pmatrix} \vec{ST} \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

On doit avoir $\frac{-4}{16} = \frac{x-5}{-4} = \frac{-3}{12}$ autrement dit $\frac{-1}{4} = \frac{(x-5)}{-4}$

D'où $x - 5 = 1$ et donc $x = 1 + 5 = 6$. (3)

4. On peut en déduire que I, J, K et L sont coplanaires (mais pas nécessairement alignés...) (0,5)

Bonus : (+1 points)

1. Des lemmings (0,25)

2. $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (0,25)

3. 34 (0,25)

4. Le nombre d'or, ϕ . (0,25)