

MATHEMATIQUES N°5

Remarque : On reste dans du classique pour ce contrôle.

Exercice 1 : (2 points)

Soit (a_n) une suite arithmétique telle que $a_5 = 4$ et $a_{482} = 673$.
Déterminer sa raison.

Exercice 2 : (3,5 points)

1° Combien de termes compte la somme $u_{14} + u_{15} + u_{16} + \dots + u_{439}$?

2° Calculer $S = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + \dots + 375$.

On attachera un soin tout particulier à la rédaction de la solution, en introduisant notamment une suite judicieusement choisie.

Exercice 3 : (8 points)

Pour compenser le coût de la vie, un patron propose à un de ses employés un contrat avec un salaire de départ de 1 850 € et une augmentation de 15 € par mois. On note v_n le salaire reçu le $n^{\text{ème}}$ mois.

1. Déterminer le salaire reçu le 36^{ème} mois.

2. Déterminer la somme totale perçue après cinq années de dur labeur.

3. On souhaite déterminer au bout de combien de temps la somme totale perçue dépassera un million d'euros.

a. Vérifier que cela revient à résoudre $3n^2 + 737n - 400\,000 \geq 0$.

b. Répondre à la question posée : on donnera la réponse finale sous la forme « x années et y mois ».

Exercice 4 : (6,5 points)

Une entreprise fabrique et vend des trottinettes électriques. On modélise le coût total de fabrication journalier, en centaines d'euros, de x trottinettes par la fonction notée C telle que :

$$C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 36x - 50$$

Le nombre x de trottinettes demandées est fonction de leur prix unitaire $P(x)$, en centaines d'euros, qui vérifie la condition $P(x) = 12 - \frac{1}{2}x$.

Et dans tout l'exercice, on a $2 \leq x \leq 14$.

1. a. Déterminer la recette totale journalière $R(x)$ correspondant à la vente de x trottinettes.

b. Pour quel nombre de trottinettes vendues quotidiennement réalise-t-on la recette maximale ? Et quel est dans ce cas le prix d'une trottinette ?

2. a. Vérifier que le bénéfice journalier $B(x)$ obtenu pour la vente de x trottinettes est $B(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 5,5x^2 - 24x + 50$

b. Etudier les variations de B .

En déduire le nombre de trottinettes vendues permettant de réaliser le bénéfice journalier maximal. Et quel est dans ce cas le prix d'une trottinette ainsi que le bénéfice réalisé à l'euro près ?

Bonus : (+1,5 points)

1. Question inévitable : quel est le nom du « maître de l'algèbre » ?

2. Pour lui, que désigne « al jabr » ?

3. Son traité d'arithmétique traite de problèmes pratiques de la vie quotidienne : peux-tu en citer au moins un ?

4. Quels nombres refuse-t-il d'utiliser dans la résolution des équations du 2nd degré ?

5. Il a également écrit un traité (aujourd'hui perdu) dont le titre latin est *Algoritmi de numero Indorum* : de quoi parlait ce traité ? (et non, la réponse n'est pas « Il parlait d'algorithmique »...)

6. Il est aussi l'auteur de *Sindhind zij* : de quel domaine cet ouvrage traite-t-il ?

MATHEMATIQUES N°5

Exercice 1 : (2 points)

On a $a_n = a_p + (n - p) \times r$

D'où $a_{482} = a_5 + (482 - 5) \times r$

$$673 = 4 + 477r$$

$$673 - 4 = 477r$$

$$\frac{669}{477} = r \quad (2)$$

Exercice 2 : (3,5 points)

$$1^\circ 439 - 14 + 1 = 426$$

Cette somme contient 426 termes. (0,5)

2° Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = u_n + 5$ et $u_1 = 5$.

(u_n) est arithmétique de raison 5 donc $u_n = 5 + (n - 1)5$.
 $= 5 + 5n - 5 = 5n$

$$375 = 5n \text{ donne } n = \frac{375}{5} = 75.$$

D'où $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{75}$

$$= 75 \times \frac{5 + 375}{2} \quad (3)$$

$$= 14\,250$$

Exercice 3 : (8 points)

$$1. v_{36} = v_1 + (36 - 1) \times 15$$

$$= 1\,850 + 35 \times 15$$

$$= 2\,375 \quad (0,5)$$

$$2. \text{ Cinq années correspondent à 60 mois et } v_{60} = 1\,850 + (60 - 1) \times 15$$

$$= 2\,735$$

$$S = 60 \times \frac{1\,850 + 2\,735}{2}$$

$$= 137\,550 \quad (1,5)$$

3. a. Je note n le nombre de mois travaillés. On doit résoudre :

$$n \times \frac{1\,850 + v_n}{2} \geq 1\,000\,000$$

$$n \times \frac{1\,850 + 1\,850 + (n - 1) \times 15}{2} \geq 1\,000\,000$$

$$n \times \frac{3\,700 + 15n - 15}{2} \geq 1\,000\,000$$

$$n(3\,685 + 15n) \geq 1\,000\,000 \times 2$$

$$3\,685n + 15n^2 - 2\,000\,000 \geq 0$$

$$15n^2 + 3\,685n - 2\,000\,000 \geq 0$$

$$3n^2 + 737n - 400\,000 \geq 0 \quad (3)$$

$$b. \Delta = 737^2 - 4 \times 3 \times (-400\,000)$$

$$= 5\,343\,169$$

$$D'où \quad n_1 = \frac{-737 - \sqrt{5\,343\,169}}{2 \times 3} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-737 + \sqrt{5\,343\,169}}{2 \times 3}$$

$$\approx -508,1 \quad \approx 262,4$$

C'est donc à partir du 263^{ème} mois que la somme totale perçue dépassera un million.

$$\text{Or, } 263 = 21 \times 12 + 11$$

Ce sera donc au bout de 21 ans et 11 mois. (3)

Exercice 4 : (6,5 points)

$$1. a. R(x) = x \times P = x \left(12 - \frac{1}{2}x \right)$$

$$= 12x - \frac{1}{2}x^2 \quad (0,75)$$

$$b. R(x) \text{ est maximal lorsque } x = \frac{-12}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 12 \quad (\text{sinon, } R'(x) = 12 - x \text{ etc...}) \quad (0,75)$$

$$\text{On a alors } P(12) = 12 - \frac{1}{2} \times 12 = 12 - 6 = 6$$

Une trottinette coûte alors 600 €. (0,5)

$$2. a. B(x) = R(x) - C(x)$$

$$= 12x - \frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 36x - 50 \right)$$

$$= 12x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 36x + 50$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + 5,5x^2 - 24x + 50 \quad (1)$$

$$b. B'(x) = -\frac{1}{3} \times 3x^2 + 5,5 \times 2x - 24$$

$$= -x^2 + 11x - 24$$

$$\Delta = 11^2 - 4 \times (-1) \times (-24)$$

$$= 121 - 96$$

$$= 25$$

D'où : $x_1 = \frac{-11 - \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = \frac{-11 - 5}{-2} = \frac{-16}{-2} = 8$ et $x_2 = \frac{-11 + \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = \frac{-11 + 5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$

x	2	3	8	14	
$B'(x)$	-	0	+	0	-
$B(x)$	21,33		39,33		
		18,5		-122,7	

$(2,5)$

Le bénéfice est maximal lorsqu'on vend 8 trottinettes, et il est de 3 933 €.

$P(8) = 8 - \frac{1}{2} \times 8 = 8 - 4 = 4$ (1)

Une trottinette coûte alors 400 €.

Bonus : (+1,75 points)

1. Al-Khwarizmi
2. « al jabr » désigne la transposition des termes d'un membre d'une équation dans l'autre.
3. Héritages / partages, considérations commerciales, mesures de terrains
4. Les nombres négatifs.
5. De la numération indienne. (+0,25)
6. D'astronomie.