

MATHEMATIQUES N°4

Remarques : est-il vraiment nécessaire d'ajouter quoi que ce soit... ?

Exercice 0 : (3 points)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^{5-2,4x}}{4x}$

Exercice 1 : (2,5 points)

Dans une urne contenant 4 boules noires et 22 boules blanches, on tire 900 fois avec remise une boule. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où l'on obtient une boule noire. *Aucune justification n'est demandée.*

1. Déterminer le plus grand nombre $a \in \mathbb{N}$ tel que $p(X \leq a) \leq 0,02$.
2. a. Déterminer alors $b \in \mathbb{N}$ tel que $p(a \leq X \leq b) \geq 0,96$.
b. Interpréter le résultat précédent par une phrase très précise.

Exercice 2 : (10 points)

f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$

- 1° a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
b. Sur quel ensemble cette fonction est-elle dérivable ?
- 2° a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b. Que peut-on déduire de ces limites... ?
- 3° a. Vérifier que $f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$
b. En déduire les variations de la fonction f .
- 4° Compléter le graphique ci-contre.

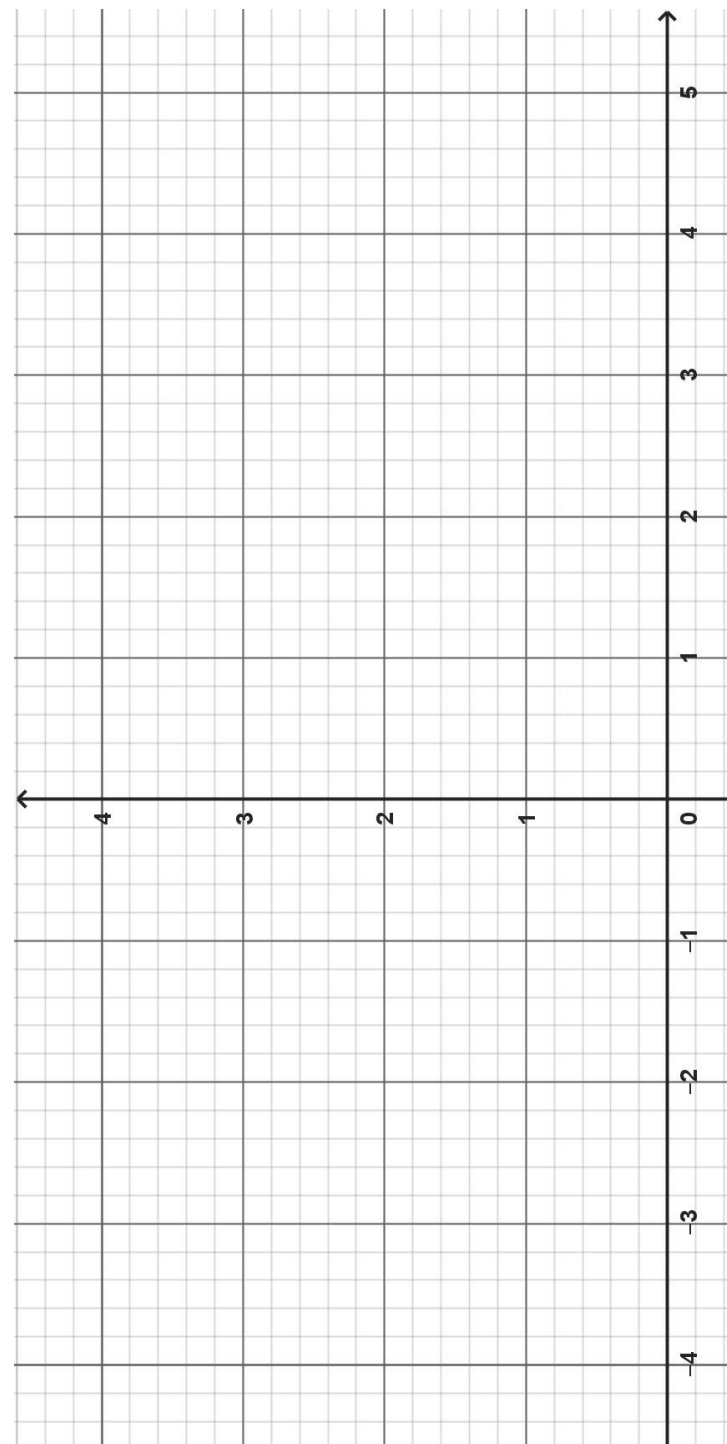
Exercice 3 : (4,5 points)

f est la fonction définie sur $[-10 ; 10]$ par $f(x) = (0,1x + 0,5e^{-0,2x})^3$

- 1° Déterminer ses variations sur $[-10 ; 10]$.
- 2° Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Bonus : (+1,5 points)

1. Quel mathématicien a œuvré pour le calcul des décimales de Pi au XV^e siècle ?
2. En approchant le cercle de rayon 1 par un hexagone, quelle première valeur approchée de Pi obtient-on ?
3. Sur quel théorème sont basés les calculs ?
4. Combien de décimales exactes ce mathématicien souhaitait-il obtenir ?
5. Pour y parvenir, il lui a fallu un polygone d'approximativement combien de côtés ?
6. On sait que la quadrature du cercle est impossible : qu'est-ce que cela signifie ?



MATHEMATIQUES N°4

Exercice 0 : (3 points)

$$\begin{aligned}\frac{3e^{5-2,4x}}{4x} &= \frac{3}{4} \times \frac{e^5 e^{-2,4x}}{x} \\ &= \frac{3e^5}{4} \times (-2,4) \frac{e^{-2,4x}}{-2,4x} \\ &= -1,8e^5 \frac{e^y}{y} \text{ en posant } y = -2,4x\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^{5-2,4x}}{4x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -1,8e^5 \frac{e^y}{y} = -\infty \text{ par croissances comparées}$$

Exercice 1 : (2,5 points)

1. On obtient $a = 116$ car $p(X \leq 116) \approx 0,0195$ et $p(X \leq 117) \approx 0,0245$.

2. a. On obtient $b = 161$. Vérification : $p(116 \leq X \leq 128) \approx 0,9666$

b. Lors de ces 900 tirages, on a plus de 96% de chances d'obtenir entre 116 fois et 161 fois une boule noire.

Exercice 2 : (10 points)

1° a. Il faut que $\frac{2x-1}{2x+1} \geq 0$:

$$\begin{array}{lll} 2x-1=0 & 2x+1=0 \\ 2x=1 & 2x=-1 \\ x=\frac{1}{2} & x=-\frac{1}{2} \end{array}$$

x	$-\infty$	$-1/2$	$1/2$	$+\infty$
$2x-1$	-	-	+	+
$2x+1$	-	+	+	+
Quotient	+	-	+	+

L'ensemble de définition de f est donc $]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$.

b. f est dérivable sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$.

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{1} = 1$. Et de même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} 2x+1 = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} 2x-1 = -2$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2x+1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$$

b. On observe une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ et une asymptote verticale d'équation $x = -0,5$.

$$\begin{aligned}3^\circ \text{ a. } \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)' &= \frac{2(2x+1) - 2(2x-1)}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{4x+2-4x+2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{4}{(2x+1)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où } f'(x) &= \frac{(2x+1)^2}{2\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{1}{(2x+1)^2} \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{2}{(2x+1)^2} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{2}{(2x+1)^2} \sqrt{2x+1}\end{aligned}$$

b. Sans soucis, $f'(x) \geq 0$: la fonction f est donc croissante.

Exercice 3 : (4,5 points)

$$\begin{aligned}1^\circ (0,1x + 0,5e^{-0,2x})' &= 0,1 + 0,5e^{-0,2x} \times (-0,2) \\ &= 0,1 - 0,1e^{-0,2x}\end{aligned}$$

$$\text{D'où } f'(x) = 3(0,1x + 0,5e^{-0,2x})^2 \times (0,1 - 0,1e^{-0,2x})$$

$f'(x)$ est du signe de $(0,1 - 0,1e^{-0,2x})$

$$0,1 - 0,1e^{-0,2x} \geq 0$$

$$-0,1e^{-0,2x} \geq -0,1$$

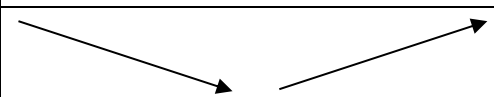
$$e^{-0,2x} \leq \frac{-0,1}{-0,1}$$

$$e^{-0,2x} \leq 1$$

$$-0,2x \leq 0$$

$$x \geq \frac{0}{-0,2}$$

$$x \geq 0$$

x	-10	0	10
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

2

2° $f'(0) = 0$ d'après la question précédente.

$$f(0) = (0,1 \times 0 + 0,5e^{-0,2 \times 0})^3 = (0,5e^0)^3 = 0,5^3 = 0,125$$

$$\text{D'où } y = 0(x - 0) + 0,125$$

$$= 0,125$$

1,5

Bonus : (+1,5 points)

1. Al-Kashi
2. $\pi \approx 3$
3. Le théorème de Pythagore.
4. 16
5. 805 306 368 côtés. *J'accepte toute valeur entre 600 millions et 1 milliard* 😊
6. Construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un disque donné est impossible.

+0,25

1,5

