

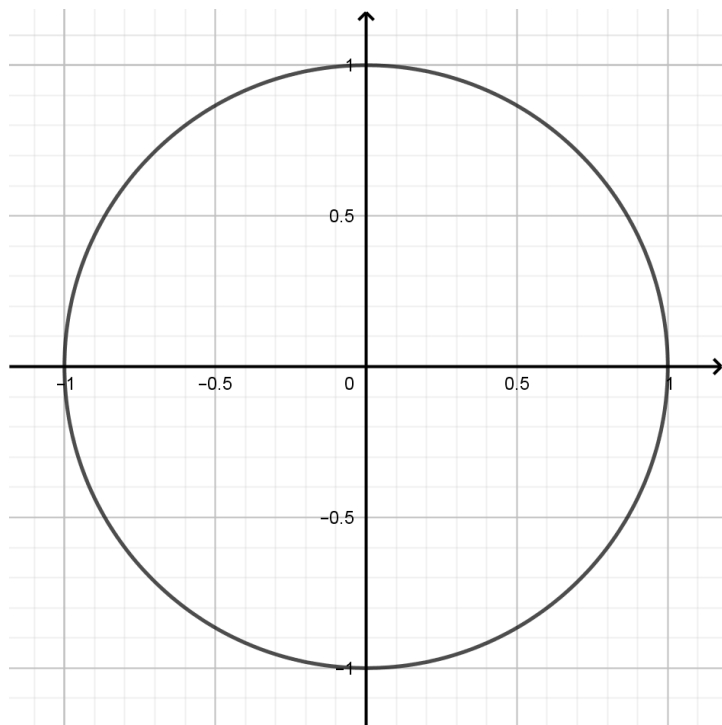
MATHÉMATIQUES N°4

Remarque : pas très original si tu as révisé les contrôles des années précédentes...

Exercice 1 : (8,5 points)

1° Sur le cercle ci-dessous, placer très précisément les points suivants :

A : $\frac{5\pi}{4}$ B : $\frac{-7\pi}{2}$ C : $\frac{7\pi}{3}$ D : $\frac{-7\pi}{6}$ E : $\frac{11\pi}{6}$ F : -143π



2° a. Déterminer la mesure principale de $\frac{373\pi}{3}$

b. Déterminer la mesure principale de $\frac{-263\pi}{7}$

3° En indiquant le calcul, convertir :

a. $G = \frac{11\pi}{12} \text{ rad}$ H = $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$
 b. $I = 240^\circ$ J = 135°

Exercice 2 : (5 points)

1. On donne $u_{n+1} = 5 - 3u_n$ et $u_1 = -1$. Calculer u_3 .
2. On donne $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 4$ ainsi que $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$. Calculer u_3 .
3. On donne $u_{n+1} = 2u_n - 3n + 1$ et $u_0 = 1$. Calculer u_2 .

Exercice 3 : (6,5 points)

- 1° a. Déterminer le sens de variation de la suite définie par $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- b. Que peut-on conjecturer concernant la limite de (u_n) lorsque $n \rightarrow +\infty$?
- 2° a. Déterminer le sens de variation de la suite définie par $v_n = n^2 - 4n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b. Déterminer le plus petit entier n à partir duquel $v_n > 1\,000\,000$.
- c. Que peut-on conjecturer concernant la limite de (v_n) lorsque $n \rightarrow +\infty$?

Bonus : (+1,75 points)

1. Quel est le titre de l'article ?
2. Comment appelle-t-on également le nombre d'or Φ ?
3. De quelle équation du second degré est-il solution ?
4. Que vaut-il ?
5. Selon l'article, peut-on retrouver le nombre d'or dans le logo  ?
6. Finalement, Φ définit surtout une forme de beauté « ésotérique ». Qu'est-ce que cela signifie ? (ce mot apparaît plusieurs fois dans l'article...)
7. Considérons le rectangle d'or. Notons x sa largeur et y sa longueur.

L'égalité des rapports s'écrit $\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x}$. On note $\Phi = \frac{y}{x}$.

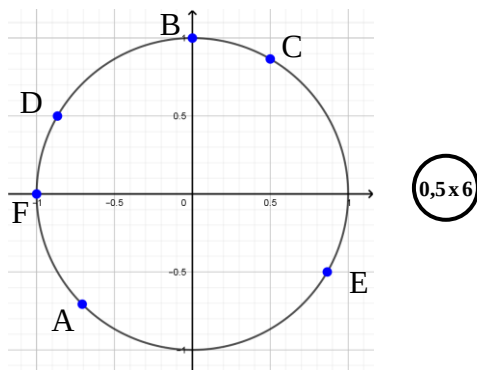
A partir de là, indiquer les étapes permettant de retrouver l'équation du second degré dont Φ est la solution positive.

Conclusion : la « beauté » du nombre d'or se trouve surtout dans les (formules) mathématiques...

Corrigé

MATHEMATIQUES N°4

Exercice 1 : (8,5 points)



(0,5 x 6)

2° a. $373 : 6 \approx 62$

$373 = 62 \times 6 + 1$

$\frac{373\pi}{3} = 62 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}$ (2)

La mesure principale de $\frac{373\pi}{3}$ est $\frac{\pi}{3}$

3° G = $\frac{11\pi}{12} \times \frac{180}{\pi}$
= 165°

H = $\frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi}$
= 120° (0,75)

4° I = $240 \times \frac{\pi}{180}$
= $\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$

J = $135 \times \frac{\pi}{180}$
= $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ (0,75)

2° b. $-263 : 14 \approx -19$

$-263 = -19 \times 14 + 3$

$\frac{-263\pi}{7} = -19 \times 2\pi + \frac{3\pi}{7}$ (2)

La mesure principale de $\frac{-263\pi}{7}$ est $\frac{3\pi}{7}$

Exercice 2 : (5 points)

1. $u_2 = 5 - 3 \times (-1)$
= $5 + 3$
= 8

$u_3 = 5 - 3 \times 8$
= $5 - 24$
= -19 (1,25)

2. $u_2 = 3u_1 - 2u_0 + 4$
= $3 \times 1 - 2 \times 2 + 4$
= $3 - 4 + 4$
= 3

$u_3 = 3u_2 - 2u_1 + 4$
= $3 \times 3 - 2 \times 1 + 4$
= $9 - 2 + 4$
= 11 (1,75)

3. $u_1 = 2u_0 - 3 \times 0 + 1$
= $2 \times 1 - 0 + 1$
= 3

$u_2 = 2u_1 - 3 \times 1 + 1$
= $2 \times 3 - 3 + 1$
= 4 (2)

Exercice 3 : (6,5 points)

1° a. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)}$
= $\frac{n - (n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n - n - 2}{n(n+1)(n+2)}$
= $\frac{-2}{n(n+1)(n+2)} < 0$ car $n \in \mathbb{N}$

Donc (u_n) est décroissante.

b. On peut conjecturer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. (0,25)

2° a. $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 4 - (n^2 - 4n + 4)$
= $n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 4 - n^2 + 4n - 4$
= $2n - 3$

Or, $2n - 3 \geq 0$ si $2n \geq 3$ c'est-à-dire $n \geq 1,5$

On peut donc dire que (v_n) est croissante à partir de $n = 2$. (1,75)

b. $v_n > 1\,000\,000 \Leftrightarrow n^2 - 4n + 4 > 1\,000\,000$
 $\Leftrightarrow n^2 - 4n + 4 - 1\,000\,000 > 0$
 $\Leftrightarrow n^2 - 4n - 999\,996 > 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-999\,996)$
= $4\,000\,000$

D'où : $n_1 = \frac{4 - \sqrt{4\,000\,000}}{2}$ et $n_2 = \frac{4 + \sqrt{4\,000\,000}}{2}$
= $\frac{4 - 2\,000}{2}$ = $\frac{4 + 2\,000}{2}$
= -998 = $1\,002$

C'est à partir du rang 1 003 que $v_n > 1\,000\,000$. (2,5)

c. On peut conjecturer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. (0,25)

Bonus : (+1,75 points)

1. « L'équation du beau. »

(+0,25)

2. La divine proportion

3. $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$

4. $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

5. Oui : quand on cherche bien, on peut trouver le nombre d'or partout ! 😊

6. Esotérique : se dit d'un mode d'expression, d'une œuvre qui n'est compréhensible que des initiés. Seuls les initiés peuvent donc retrouver le nombre d'or dans certains « standards » de beauté.

7. $\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x}$ devient $\Phi = \frac{1}{\frac{y-x}{x}} = \frac{1}{\frac{y}{x} - \frac{x}{x}} = \frac{1}{\Phi - 1}$

D'où $\Phi(\Phi - 1) = 1$ et donc $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.