

MATHÉMATIQUES N°3

Remarques : dernier contrôle du trimestre : l'occasion de briller ! Et comme toujours, on soigne la présentation et la rédaction pour ne pas perdre de points...

Exercice 1 : (11,5 points)

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B. On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7

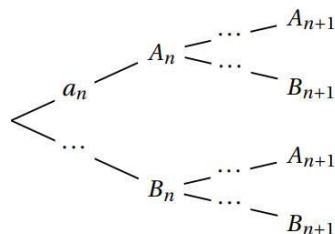
Pour un entier naturel $n \geq 1$, on note A_n et B_n les évènements :

A_n : La n -ième partie est une partie de type A.

B_n : La n -ième partie est une partie de type B.

Et pour tout entier $n \geq 1$, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n .

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré :
- b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$



Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie. On a donc $a \in [0 ; 1]$.

La suite (a_n) est donc définie par $a_1 = a$, et $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

- a. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $0 \leq a_n \leq 0,6$
- b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.
- c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. *Étude du cas général.* Dans cette question, on a $a \in [0 ; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 0,6$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

- a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
- b. En déduire que $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$ pour tout entier $n \geq 1$.
- c. Déterminer la limite de la suite (a_n) . Cette limite dépend-elle de a ?
- d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B. Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

Exercice 2 : (3 points)

Un serveur a étudié les pourboires laissés par ses clients durant l'année écoulée : il a constaté que 25% des clients ne laissent pas de pourboire et que les autres laissent un pourboire moyen de 1,80 €.

On prélève au hasard un échantillon de 50 clients de ce restaurant. On suppose que les paiements des clients sont indépendants.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de clients ayant laissé un pourboire.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Déterminer et interpréter $p(X = 35)$.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement « Avec ces 50 clients, le serveur a reçu 72 € de pourboires. ».
3. Déterminer et interpréter $p(35 \leq X \leq 40)$.

Exercice 3 : (3 points)

On lance un dé pipé dont la probabilité de sortie du 6 est 0,1.

Combien de lancers faut-il réaliser pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 dépasse les 99,9% ?

On veillera à rédiger les choses, à expliquer la démarche...

Exercice 4 : (2,5 points)

Déterminer les limites suivantes :

$$1. u_n = \frac{(-4)^n}{7n+2} \qquad 2. w_n = 3^n - 4^n$$

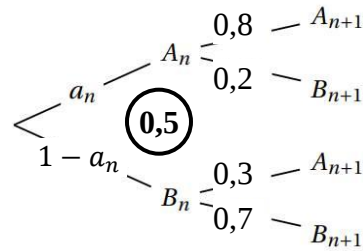
Bonus : (+1,5 points)

1. Pourquoi a-t-on commencé par compter par paquets de 5 ou de 10 ?
2. Pourquoi a-t-on fini par abandonner les chiffres romains ?
3. Comment appelle-t-on la numération actuelle, celle qui attribue à un même symbole une valeur différente suivant son emplacement ?
4. Dans cette numération, que caractérise le 0, plus pratique qu'un emplacement vide parfois ambigu ?
5. Quel mathématicien italien a importé le système décimal arabe en Europe ?
6. Vers quelle période (quel siècle) cela a-t-il eu lieu ?

MATHEMATIQUES N°3

Exercice 1 : (11,5 points)

1. a.



b. D'après cet arbre :

$$\begin{aligned} p(A_{n+1}) &= a_n \times 0,8 + (1 - a_n) \times 0,3 \\ a_{n+1} &= 0,8a_n + 0,3 - 0,3a_n \\ &= 0,5a_n + 0,3 \end{aligned}$$

(0,5)

2. a. Initialisation : $n = 1$

$$a_1 = a = 0,5 \text{ donc } 0 \leq a_1 \leq 0,6$$

Hérédité : supposons que $0 \leq a_n \leq 0,6$ pour un certain rang n .

Montrons que $0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$

On a $0 \leq a_n \leq 0,6$ par HR

$$0 \leq 0,5a_n \leq 0,3$$

$$0,3 \leq 0,5a_n + 0,3 \leq 0,3 + 0,3$$

$$0 \leq 0,3 \leq a_{n+1} \leq 0,6$$

Par récurrence, on a donc $0 \leq a_n \leq 0,6$ pour tout $n \geq 1$.

(2)

$$\begin{aligned} b. a_{n+1} - a_n &= 0,5a_n + 0,3 - a_n \\ &= -0,5a_n + 0,3 \end{aligned}$$

Or, $0 \leq a_n \leq 0,6$ donc $0 \geq -0,5a_n \geq -0,3$

$$0,3 \geq -0,5a_n + 0,3 \geq 0$$

$$0,3 \geq a_{n+1} - a_n \geq 0$$

En particulier, $a_{n+1} - a_n \geq 0$ donc (a_n) est croissante.

(2)

c. (a_n) est croissante et majorée par 0,6 donc elle converge vers ℓ .

(0,5)

On a $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ donc $\ell = 0,5\ell + 0,3$

$$\ell - 0,5\ell = 0,3$$

$$0,5\ell = 0,3$$

$$\ell = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

(1,5)

3. a. $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6$

$$= 0,5a_n + 0,3 - 0,6$$

$$= 0,5(u_n + 0,6) + 0,3 - 0,6$$

$$= 0,5u_n + 0,3 - 0,3$$

$$= 0,5u_n$$

(u_n) est donc géométrique de raison 0,5.

(1,5)

$$b. u_1 = a_1 - 0,6$$

$$= a - 0,6$$

$$\text{Donc } u_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$$

$$\text{D'où } a_n = u_n + 0,6$$

$$= (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$$

(1,5)

$$c. 0 < 0,5 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6 = 0,6$$

Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,6$ et cette limite ne dépend donc pas de a .

(1)

d. D'après la question précédente, après un très grand nombre de parties, la probabilité qu'un joueur joue une partie de type A s'approche de 60% : la publicité la plus vue sera donc celle insérée en début des parties A.

(0,5)

Exercice 2 : (3 points)

1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(50 ; 0,75)$ car les clients sont indépendants.

$$p(X = 35) = \binom{50}{35} 0,75^{35} \times 0,25^{15} \approx 0,089$$

La probabilité que 35 clients laissent un pourboire est de 8,9%.

(1)

$$2. 72 : 1,8 = 40$$

$$p(X = 40) = \binom{50}{40} 0,75^{40} \times 0,25^{10} \approx 0,099$$

La probabilité de recevoir 72 € de pourboires est de 9,9%.

(1)

$$3. p(35 \leq X \leq 40) = p(X \leq 40) - p(X \leq 34) \approx 0,673$$

La probabilité d'obtenir entre 35 et 40 pourboires est de 67,3%.

(1)

Exercice 3 : (3 points)

Notons X la variable aléatoire correspondant au nombre de 6 obtenus au cours des n lancers.

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n ; 0,1)$ car les lancers sont identiques et indépendants.

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X \leq 0)$$

$$= 1 - p(X = 0)$$

$$= 1 - \binom{n}{0} 0,1^0 \times 0,9^n$$

$$= 1 - 0,9^n$$

$$\text{Or, } 1 - 0,9^{65} \approx 0,99894 \text{ et } 1 - 0,9^{66} \approx 0,99904$$

C'est donc à partir du 66^{ème} lancer que la probabilité d'obtenir au moins un 6 dépassera 99,9%.

(3)

Exercice 4 : (2,5 points)

$$1. u_n = \frac{(-4)^n}{7^{n+2}}$$

$$= \frac{(-4)^n}{7^n \times 7^2}$$

$$= \left(\frac{-4}{7}\right)^n \times \frac{1}{7^2}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (1)

$$2. w_n = 3^n - 4^n$$

$$= 4^n \left(\frac{3^n}{4^n} - 1 \right)$$

$$= 4^n \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n - 1 \right)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n - 1 = -1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$ (1,5)

Bonus : (+1,5 points)

1. Car une main compte 5 doigts, et deux mains 10 doigts.
2. Ils nécessitaient trop de symboles différents et donnaient lieu à des calculs parfois trop compliqués (une seule des deux réponses → accepté)
3. La numération de position.
4. L'absence de quantité à un certain rang. (+0,25)
5. Fibonacci
6. XII^{ème} / XIII^{ème} siècle