

MATHEMATIQUES N°3

Remarques : soin et rédaction pourront être sanctionnés...

Exercice 1 : (7,5 points)

1° Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2+7x}{3-4x} \quad f_2(x) = \frac{3x}{7} - \frac{7}{3x}$$

$$f_3(x) = \frac{3}{x^2-3x+5} \quad f_4(x) = \sqrt{7-8x}$$

2° a. Calculer la dérivée de la fonction $h(x) = x^3 + 4,5x^2 - 30x + 4$

b. Etudier le signe de $h'(x)$. *Un tableau de signe suffira.*

Exercice 2 : (5 points)

Résoudre : 1°) $7x^2 - 2x - 5 > 0$ 2°) $6x^2 - 4x + 1 \leq 2x^2 - 7x - 1$

Exercice 3 : (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 13x^2 - 16x + 5$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer $f'(x)$.

2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = 4x - 5$.

Exercice 4 : (4 points)

1. Déterminer le signe de $3x^2 + 2x - 5$.

2. En déduire la résolution de $3x + 2 \geq \frac{5}{x}$

Indication : transformer l'inéquation puis faire un tableau de signes...

Bonus : (+1,75 points)

- Pourquoi l'assertion « Si $5 = 2$, alors la Terre est plate » est-elle vraie ?
- Pourquoi l'assertion « $5 > 2$ ou la Terre est plate » est-elle vraie ?
- Pourquoi l'assertion « $5 > 2$ et la Terre est plate » est-elle fausse ?
- Comment appelle-t-on ce raisonnement : « Les choses rares sont chères, une voiture bon marché est rare donc une voiture bon marché est chère. » ?
- Qu'est-ce qu'un axiome ?
- Compléter : « Mathématiques = axiomatique + ... »
- Ecrire $A = \frac{5}{7-3\sqrt{2}}$ sans racine carrée au dénominateur (*et expliquer...*).

MATHEMATIQUES N°3

Remarques : soin et rédaction pourront être sanctionnés...

Exercice 1 : (7,5 points)

1° Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{2+7x}{3-4x} \quad f_2(x) = \frac{3x}{7} - \frac{7}{3x}$$

$$f_3(x) = \frac{3}{x^2-3x+5} \quad f_4(x) = \sqrt{7-8x}$$

2° a. Calculer la dérivée de la fonction $h(x) = x^3 + 4,5x^2 - 30x + 4$

b. Etudier le signe de $h'(x)$. *Un tableau de signe suffira.*

Exercice 2 : (5 points)

Résoudre : 1°) $7x^2 - 2x - 5 > 0$ 2°) $6x^2 - 4x + 1 \leq 2x^2 - 7x - 1$

Exercice 3 : (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 13x^2 - 16x + 5$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer $f'(x)$.

2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = 4x - 5$.

Exercice 4 : (4 points)

1. Déterminer le signe de $3x^2 + 2x - 5$.

2. En déduire la résolution de $3x + 2 \geq \frac{5}{x}$

Indication : transformer l'inéquation puis faire un tableau de signes...

Bonus : (+1,75 points)

- Pourquoi l'assertion « Si $5 = 2$, alors la Terre est plate » est-elle vraie ?
- Pourquoi l'assertion « $5 > 2$ ou la Terre est plate » est-elle vraie ?
- Pourquoi l'assertion « $5 > 2$ et la Terre est plate » est-elle fausse ?
- Comment appelle-t-on ce raisonnement : « Les choses rares sont chères, une voiture bon marché est rare donc une voiture bon marché est chère. » ?
- Qu'est-ce qu'un axiome ?
- Compléter : « Mathématiques = axiomatique + ... »
- Ecrire $A = \frac{5}{7-3\sqrt{2}}$ sans racine carrée au dénominateur (*et expliquer...*).

MATHEMATIQUES N°3

Exercice 1 : (7,5 points)

$$1^{\circ} f_1'(x) = \frac{7(3-4x) - (-4)(2+7x)}{(3-4x)^2} \quad f_2'(x) = \frac{3}{7} - \frac{7}{3} \times \frac{-1}{x^2}$$

$$= \frac{21 - 28x + 8 + 28x}{(3-4x)^2} = \frac{29}{(3-4x)^2} \quad (1,25)$$

$$= \frac{3}{7} + \frac{3x^2}{9x^2 + 49} = \frac{21x^2 + 49}{21x^2} \quad (1,25)$$

$$f_3'(x) = 3 \times \frac{-(2x-3)}{(x^2-3x+5)^2} \quad f_4'(x) = \frac{1}{2\sqrt{7-8x}} \times (-8)$$

$$= \frac{-3(2x-3)}{(x^2-3x+5)^2} \quad (1,25)$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{7-8x}} \quad (1,25)$$

$$2^{\circ} a. h'(x) = 3x^2 + 4,5 \times 2x - 30 \quad (0,5)$$

$$= 3x^2 + 9x - 30$$

$$b. h'(x) = 3(x^2 + 3x - 10) \text{ (c'est plus simple...)}$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-10)$$

$$= 9 + 40$$

$$= 49$$

$$x_1 = \frac{-3-7}{2 \times 1} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+7}{2 \times 1} = 2$$

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$	
$h'(x)$	+	0	-	0	+

2

(2)

Exercice 2 : (5 points)

$$1^{\circ} \Delta = (-2)^2 - 4 \times 7 \times (-5)$$

$$= 4 + 140$$

$$= 144$$

$$D'où : x_1 = \frac{2 - \sqrt{144}}{2 \times 7} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{144}}{2 \times 7}$$

$$= \frac{2-12}{14} = \frac{-10}{14} = -\frac{5}{7}$$

$$= \frac{2+12}{14} = \frac{14}{14} = 1$$

$$\text{Donc } x \in \left] -\infty; -\frac{5}{7} \right[\cup] 1; +\infty[\quad (2,5)$$

$$2^{\circ} 6x^2 - 4x + 1 \leq 2x^2 - 7x - 1$$

$$6x^2 - 4x + 1 - 2x^2 + 7x + 1 \leq 0$$

$$4x^2 + 3x + 2 \leq 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 4 \times 2$$

$$= 9 - 32$$

$$= -23 < 0$$

$4x^2 + 3x + 2$ est donc toujours positif : l'inéquation n'a pas de solutions ! (2,5)

Exercice 3 : (3,5 points)

$$1. f'(x) = 6x^2 + 26x - 16 \quad (0,5)$$

$$2. \text{ On doit résoudre } f'(x) = 4.$$

$$6x^2 + 26x - 16 = 4$$

$$6x^2 + 26x - 16 - 4 = 0$$

$$6x^2 + 26x - 20 = 0$$

$$3x^2 + 13x - 10 = 0 \text{ (c'est plus simple...)}$$

$$\Delta = 13^2 - 4 \times 3 \times (-10)$$

$$= 169 + 120$$

$$= 289$$

$$D'où : x_1 = \frac{-13 - \sqrt{289}}{2 \times 3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-13 + \sqrt{289}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-13-17}{6} = \frac{-30}{6} = -5$$

$$= \frac{-13+17}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Autrement dit, lorsque $a = -5$ ou $a = \frac{2}{3}$, $\mathcal{T}_a$ est parallèle à $\mathcal{C}_f$. (3)

Exercice 4 : (4 points)

$$1. \Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5)$$

$$= 4 + 60$$

$$= 64$$

$$D'où : x_1 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times 3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{-2-8}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$= \frac{-2+8}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

x	$-\infty$	$-5/3$	1	$+\infty$	
$3x^2 + 2x - 5$	$+$	0	$-$	0	$+$

2

(2)

2. Résolvons $3x + 2 \geq \frac{5}{x}$

$$3x + 2 - \frac{5}{x} \geq 0$$

$$\frac{3x^2 + 2x - 5}{x} \geq 0$$

x	$-\infty$	$-5/3$	0	1	$+\infty$	
$3x^2 + 2x - 5$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{3x^2 + 2x - 5}{x}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Donc $x \in \left[-\frac{5}{3}; 0\right[\cup [1; +\infty[$ (2)

Bonus : (+1,75 points)

1. Si l'hypothèse de départ est fausse, alors n'importe quelle conclusion est vraie.
2. Dès que l'une des deux assertions est vraie, l'assertion « ou » est vraie.
3. Dès que l'une des assertions est fausse, l'assertion « et » est fausse.
4. Un syllogisme
5. Un axiome est une propriété essentielle, indémontrable, à la base de tout.
6. Logique

(+0,25)

7. $A = \frac{5}{7 - 3\sqrt{2}}$

$$= \frac{5(7 + 3\sqrt{2})}{(7 - 3\sqrt{2})(7 + 3\sqrt{2})}$$

$$= \frac{35 + 15\sqrt{2}}{49 - 9 \times 2}$$

$$= \frac{35 + 15\sqrt{2}}{31}$$