

MATHEMATIQUES N°2

Remarques : deux différences par rapport au précédent contrôle : d'une part, écrire hippopotame ne rapportera malheureusement rien cette fois-ci, et d'autre part, la présentation / rédaction pourra te faire perdre des points si tu n'as pas retenu les fondamentaux évoqués lors de la remise du 1^{er} contrôle.

Exercice 1 : (2,5 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. On sait que :

$$\begin{array}{llll} \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty & \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty & \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty & \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3 & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 & f(-3) = 0 & f(0) = f(4) = -1 \end{array}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

1° Indiquer les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$ et donner leurs équations.

2° Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 : (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3; 0,8\}$ par $f(x) = \frac{2 - 7x}{5x^2 + 11x - 12}$

En expliquant la démarche, déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) & 2. \lim_{\substack{x \rightarrow 0,8 \\ x > 0,8}} f(x) & 3. \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) \end{array}$$

Exercice 3 : (9 points)

Chacune des questions A, B, C, D et E sont indépendantes. On indiquera le calcul à effectuer, son détail si besoin puis la réponse numérique finale.

A. Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher. À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac. Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus. Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le numéro 5, puis le numéro 1, alors le tirage correspondant est (4 ; 5 ; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. a. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

B. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

1. Combien de codes différents existe-t-il ?
2. Combien de codes sans le 0 existe-t-il ?
3. Combien de codes contenant au moins un 0 existe-t-il ?

C. Une anagramme est un mot obtenu par la permutation des lettres d'un mot donné. Quel est le nombre d'anagrammes que l'on peut former à l'aide du mot « ANAGRAMME » ? Justifier.

D. Fred et Émile font partie d'une équipe de joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de constituer un comité de 3 joueurs.

1. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
2. Combien y-a-t-il de comités avec exactement deux garçons et une fille ?
3. Combien y-a-t-il de comités avec au moins deux garçons ?
4. On veut que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
5. On ne veut pas que Fred et Émile soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

E. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est composé de quatre couleurs (trèfle, carreau, cœur, pique) avec huit valeurs différentes pour chacune d'elles (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As). On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages contenant 5 carreaux ?
3. Combien y-a-t-il de tirages contenant 4 As ?
4. Combien y-a-t-il de tirages contenant exactement 3 cœurs ?
5. a. Combien y-a-t-il de tirages contenant exactement 3 Valets ?
b. Combien y-a-t-il de tirages contenant exactement 3 cartes de valeurs identiques ?

Exo 4 : (3 points)

Soit n un entier tel que $n \geq 3$. Résoudre l'équation $5n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$.

Si ça bloque, résoudre $n^3 - 25n = 0$ puisqu'on est supposés arriver à ça...

Bonus : (+1,5 points)

1. Selon qui « La récurrence est le raisonnement mathématique par excellence. » ?
2. Comment appelle-t-on le procédé permettant d'aboutir à une conjecture via l'observation de cas particuliers ?
3. Citer l'un des deux mathématiciens donnés en exemple et dont une conjecture a été anéantie par un contre-exemple.
4. Que vaut la somme des n premiers entiers impairs ?
5. Dans l'hérédité telle qu'elle est proposée par l'article, on ne suppose pas l'hypothèse de récurrence vraie « pour un certain rang n » : te souviens-tu de ce qu'on suppose pour n ? (c'est ce qu'on appelle une récurrence forte)
6. Si on trouve des traces de ce qui pourrait être des démonstrations par récurrence dès Euclide, à quel mathématicien attribue-t-on la première apparition explicite de démonstration par récurrence ?

MATHEMATIQUES N°2

Respect de la manière d'écrire les numéros des exercices : **+0,25**

Exercice 1 : (2,5 points)

1° On a deux asymptotes verticales :

$$x = -2$$

$$x = 3$$

0,5

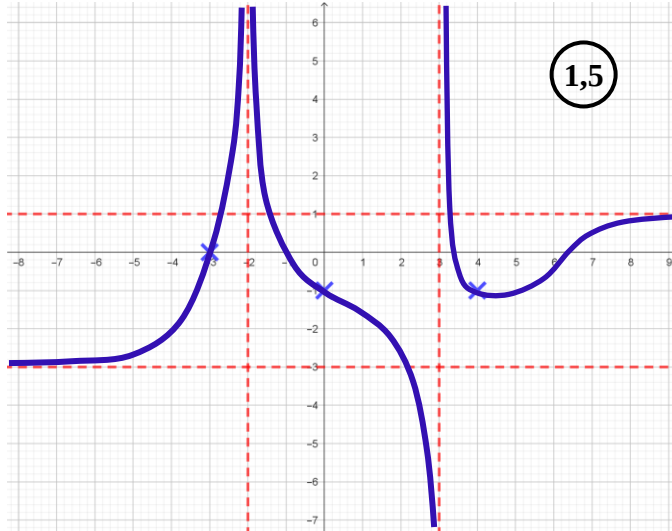
On a deux asymptotes horizontales :

$$y = -3 \text{ (en } -\infty)$$

$$y = 1 \text{ (en } +\infty).$$

0,5

2° Voilà une possibilité pour la courbe représentative de f :



Exercice 2 : (5,5 points)

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= \frac{2 - 7x}{5x^2 + 11x - 12} \\ &= \frac{x\left(\frac{2}{x} - 7\right)}{x^2\left(5 + \frac{11}{x} - \frac{12}{x^2}\right)} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{\frac{2}{x} - 7}{5 + \frac{11}{x} - \frac{12}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - 7}{5 + \frac{11}{x} - \frac{12}{x^2}} = -\frac{7}{5}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \quad \textbf{1,5}$$

$$2. \text{ On a } \lim_{x \rightarrow 0,8} 2 - 7x = 2 - 7 \times 0,8 = -3,6$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 11^2 - 4 \times 5 \times (-12) \\ &= 121 + 240 \\ &= 361 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-11 - \sqrt{361}}{2 \times 5} \\ &= \frac{-11 - 19}{10} \\ &= \frac{-30}{10} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-11 + \sqrt{361}}{2 \times 5} \\ &= \frac{-11 + 19}{10} \\ &= \frac{8}{10} = 0,8 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3	$0,8$	$+\infty$
$5x^2 + 11x - 12$	+	−	+	+

1

$$\text{D'où } \lim_{\substack{x \rightarrow 0,8 \\ x > 0,8}} 5x^2 + 11x - 12 = 0^+$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0,8 \\ x > 0,8}} f(x) = -\infty \quad \textbf{1,5}$$

$$3. \text{ On a } \lim_{x \rightarrow -3} 2 - 7x = 2 - 7 \times (-3) = 23$$

$$\text{De plus, } \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} 5x^2 + 11x - 12 = 0^+$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty \quad \textbf{1,5}$$

Exercice 3 : (9 points)

A. 1. Il existe $8^3 = 512$ tirages possibles. **0,5**

2. a. Cela revient à faire un tirage sans remise : $\mathcal{A}_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$ **0,5**

b. Il existe donc $512 - 336 = 176$ tirages possibles. **0,5**

B. 1. Il existe $10^4 \times \mathcal{A}_3^2 = 10\,000 \times 6 = 60\,000$ codes possibles. **0,5**

2. Il existe $9^4 \times \mathcal{A}_3^2 = 39\,366$ codes possibles sans le 0. **0,5**

3. Il existe $60\,000 - 39\,366 = 20\,634$ codes avec au moins un 0. **0,5**

C. On a $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{2} = 3\,024 \times 10 \times 1 = 30\,240$ anagrammes. **0,5**

D. 1. On a $\binom{8}{3} = 56$ comités possibles. **0,5**

2. On a $\binom{6}{2} \times \binom{2}{1} = 15 \times 2 = 30$ comités possibles avec 2 garçons et 1 fille. **0,5**

3. On a $\binom{6}{2} \times \binom{2}{1} + \binom{6}{3} = 50$ comités possibles avec au moins 2 garçons. **0,5**

4. On a $\binom{6}{1} = 6$ comités possibles avec Fred & Emile. **0,5**

5. On a $56 - 6 = 50$ comités possibles sans que Fred & Emile soient ensemble. **0,5**

E. 1. Il existe $\binom{32}{5} = 201\,376$ tirages. (0,5)

2. Il existe $\binom{8}{5} = 56$ tirages avec 5 carreaux. (0,5)

3. Il existe $\binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 28$ tirages avec 4 As. (0,5)

4. Il existe $\binom{8}{3} \times \binom{24}{2} = 56 \times 276 = 15\,456$ tirages avec 3 coeurs. (0,5)

5. a. Il existe $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} = 4 \times 378 = 1\,512$ tirages avec 3 Valets. (0,5)

b. Il existe $1\,512 \times 8$ tirages avec 3 cartes de valeurs identiques. (0,5)

Exo 4 : (3 points)

$$5n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

$$5n = \frac{n!}{(n-1)!1!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} + \frac{n!}{(n-3)!3!}$$

$$5n = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$30n = 6n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)$$

$$0 = 6n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2) - 30n$$

$$0 = n(6 + 3(n-1) + (n-1)(n-2) - 30)$$

$$0 = n(-24 + 3n - 3 + n^2 - 2n - n + 2)$$

$$0 = n(n^2 - 25) \quad (2)$$

D'où $n = 0$ ou $n^2 - 25 = 0$

Or $n \geq 3$ donc $n = 0$ est impossible. D'où $n^2 - 25 = 0$ c'est-à-dire $n^2 = 25$

Il y a donc deux possibilités : $n = 5$ et $n = -5$.

Mais $n \geq 3$ donc $n = 5$. (1)

Bonus : (+1,5 points)

1. Henri Poincaré

2. L'induction.

3. Pierre de Fermat ou Alphonse de Polignac. (+0,25)

4. n^2

5. $n \geq n_0$

6. Blaise Pascal.