

MATHEMATIQUES N°1

Remarques : du classique, rien que du classique. Par conséquent, on s'applique et on rédige par-fai-te-ment, qu'il s'agisse des récurrences ou des calculs dans lesquels on indique les étapes. Et sans poser la moindre question, commence par écrire hippopotame au tout début de ta copie.

Bon courage !

Exercice 1 : (7,5 points)

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0,7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3$.

1. Montrer par récurrence que $v_n \leq 4$ pour tout entier naturel n .
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -3,05 \times 0,92^n + 3,75$.

Exercice 2 : (4,5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 0,8u_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Donner la forme explicite de u_n .
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = 15(1 - 0,8^n)$.

Non, on ne peut pas utiliser la somme des termes d'une suite géométrique... Il faut faire une récurrence.

Exercice 3 : (3 points)

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = 2\sqrt{n} - 5$ pour tout $n \geq 0$.

1. Déterminer le rang à partir duquel $w_n \geq 10\,000$.
2. Démontrer que (w_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : (5 points)

Déterminer les limites lorsque $n \rightarrow +\infty$ de :

$$t_n = \frac{5n + 3}{2 - 3n + 4n^2} \quad s_n = \frac{3n\sqrt{n} - 2n}{4\sqrt{n} - 7n}$$

Bonus : (+1,25 points)

1. Donner la citation de Jimmy Hendrix qui introduit le cahier de cours.
2. Donner le jour et le mois de l'anniversaire de Mister D. 😊
3. Ecrire la définition mathématique de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.
4. Donner un exemple de suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = 13$.

MATHEMATIQUES N°1

Remarques : du classique, rien que du classique. Par conséquent, on s'applique et on rédige par-fai-te-ment, qu'il s'agisse des récurrences ou des calculs dans lesquels on indique les étapes. Et sans poser la moindre question, commence par écrire hippopotame au tout début de ta copie.

Bon courage !

Exercice 1 : (7,5 points)

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0,7$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3$.

1. Montrer par récurrence que $v_n \leq 4$ pour tout entier naturel n .
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -3,05 \times 0,92^n + 3,75$.

Exercice 2 : (4,5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 0,8u_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Donner la forme explicite de u_n .
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n u_k = 15(1 - 0,8^n)$.

Non, on ne peut pas utiliser la somme des termes d'une suite géométrique... Il faut faire une récurrence.

Exercice 3 : (3 points)

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = 2\sqrt{n} - 5$ pour tout $n \geq 0$.

1. Déterminer le rang à partir duquel $w_n \geq 10\,000$.
2. Démontrer que (w_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : (5 points)

Déterminer les limites lorsque $n \rightarrow +\infty$ de :

$$t_n = \frac{5n + 3}{2 - 3n + 4n^2} \quad s_n = \frac{3n\sqrt{n} - 2n}{4\sqrt{n} - 7n}$$

Bonus :

1. Donner la citation de Jimmy Hendrix qui introduit le cahier de cours.
2. Donner le jour et le mois de l'anniversaire de Mister D. 😊
3. Ecrire la définition mathématique de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.
4. Donner un exemple de suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = 13$.

MATHEMATIQUES N°1

Hippopotame (+0,25)

Exercice 1 : (7,5 points)

1. Initialisation : $n = 0$

$v_0 = 0,7 \leq 4$ donc la propriété est vérifiée. (0,75)

Hérédité : Supposons que $v_n \leq 4$ pour un certain rang n . (0,75)

Montrons que $v_{n+1} \leq 4$.

On a $v_n \leq 4$ par HR.

$$0,92v_n \leq 0,92 \times 4$$

$$0,92v_n + 0,3 \leq 3,68 + 0,3$$

$$v_{n+1} \leq 3,98 \leq 4$$

Par récurrence, on a donc bien $v_n \leq 4$ pour tout entier naturel n . (2,25)

2. Initialisation : $n = 0$

$v_0 = 0,7$ et $-3,05 \times 0,92^0 + 3,75 = -3,05 + 3,75 = 0,7$: la propriété est vérifiée. (0,75)

Hérédité : Supposons que $v_n = -3,05 \times 0,92^n + 3,75$ pour un certain rang n . (0,75)

Montrons que $v_{n+1} = -3,05 \times 0,92^{n+1} + 3,75$

On a $v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3$

$$= 0,92(-3,05 \times 0,92^n + 3,75) + 0,3$$

$$= -3,05 \times 0,92^{n+1} + 3,45 + 0,3$$

$$= -3,05 \times 0,92^{n+1} + 3,75$$

Par récurrence, on a donc $v_n = -3,05 \times 0,92^n + 3,75$ pour tout $n \geq 0$. (2,25)

Exercice 2 : (4,5 points)

1. $u_n = 3 \times 0,8^{n-1}$ car c'est une suite géométrique de raison 0,8. (0,5)

2. Initialisation : $n = 1$

$15(1 - 0,8^1) = 15 \times 0,2 = 3$ et $\sum_{k=1}^1 u_k = u_1 = 3$: la propriété est vérifiée. (0,75)

Hérédité : supposons que $\sum_{k=1}^n u_k = 15(1 - 0,8^n)$ pour un certain rang n .

Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 15(1 - 0,8^{n+1})$. (0,75)

$$\text{On a } \sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^n u_k + u_{n+1}$$

$$= 15(1 - 0,8^n) + 3 \times 0,8^n \text{ par HR}$$

$$= 15 - 15 \times 0,8^n + 3 \times 0,8^n$$

$$= 15 - 12 \times 0,8^n$$

Or, $15(1 - 0,8^{n+1}) = 15 - 15 \times 0,8^{n+1} = 15 - 15 \times 0,8 \times 0,8^n$

$$= 15 - 12 \times 0,8^n$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{n+1} u_k = 15(1 - 0,8^{n+1}).$$

Par récurrence, on a donc $\sum_{k=1}^n u_k = 15(1 - 0,8^n)$ pour tout $n \geq 1$. (2,5)

Exercice 3 : (3 points)

$$1. w_n \geq 10\,000 \Leftrightarrow 2\sqrt{n} - 5 \geq 10\,000$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n} \geq 10\,000 + 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{10\,005}{2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \left(\frac{10\,005}{2}\right)^2 \text{ car } n \geq 0$$

C'est à partir du rang 25 025 007 que $w_n \geq 10\,000$. (1,25)

$$2. \text{ Soit } A > 0. w_n \geq A \Leftrightarrow 2\sqrt{n} - 5 \geq A$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n} \geq A + 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{A + 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \left(\frac{A + 5}{2}\right)^2 \text{ car } n \geq 0$$

Posons $N = \left\lceil \left(\frac{A + 5}{2}\right)^2 \right\rceil + 1$.

Si $n \geq N$ alors $w_n \geq A$: cela prouve que (w_n) tend vers $+\infty$. (1,75)

Exercice 4 : (5 points)

$$t_n = \frac{5n + 3}{2 - 3n + 4n^2}$$

$$= \frac{n\left(5 + \frac{3}{n}\right)}{n^2\left(\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n} + 4\right)}$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{5 + \frac{3}{n}}{\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n} + 4} \quad (1,25)$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{3}{n}}{\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n} + 4} = \frac{5}{4} \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0. \quad (1,25)$$

$$s_n = \frac{3n\sqrt{n} - 2n}{4\sqrt{n} - 7n}$$

$$= \frac{n\sqrt{n}\left(3 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(\frac{4\sqrt{n}}{n} - 7\right)}$$

$$= \sqrt{n} \times \frac{3 - \frac{2}{\sqrt{n}}}{\frac{4}{\sqrt{n}} - 7} \quad (1,25)$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{\sqrt{n}}}{\frac{4}{\sqrt{n}} - 7} = \frac{3}{-7} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty \text{ par produit. } (1,25)$$

Bonus : 1. « La connaissance parle, mais la sagesse écoute » (+0,25)

3. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - 5| < \varepsilon$ (+0,5)

2. 02/02/19... (+0,25)

4. $u_n = n$ et $v_n = \frac{13}{n}$ par ex. (+0,25)