

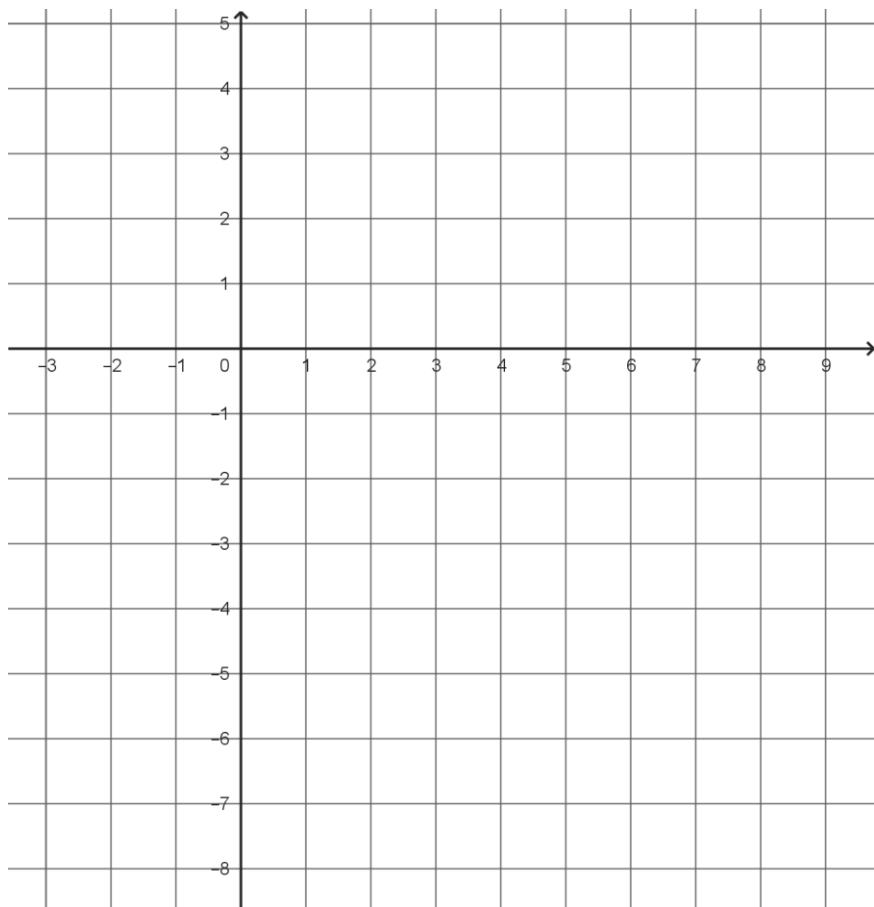
MATHEMATIQUES N°1

Remarques : rien de nouveau dans ce 1^{er} contrôle : (presque) tous les exercices ont déjà été faits / pouvaient être faits d'une manière ou d'une autre.

Exercice 1 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Déterminer les coordonnées du sommet de $\mathcal{C}_f$.
2. Donner l'équation de l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
3. Soit A le point de coordonnées (9 ; -8). Vérifier que $A \in \mathcal{C}_f$.
4. Tracer $\mathcal{C}_f$ et son axe de symétrie dans le repère ci-dessous.



Exercice 2 : (5 points)

Mettre sous forme canonique :

1. En effectuant le travail artisanalement : $f(x) = 4x^2 - 40x + 108$
2. En utilisant les formules : $g(x) = -7x^2 - 42x - 66$

Exercice 3 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5}{3-2x}$.

1. Vérifier que $f'(1) = 10$.
2. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_1$ à $\mathcal{C}_f$ en 1.
3. Quelle est la particularité de $\mathcal{T}_2$ sachant que $f'(2) = 10$?

Exercice 4 : (2 points)

Par lecture graphique, compléter les équations des tangentes :

$\mathcal{T}_{-1}$:

$\mathcal{T}_{1,2}$:

$\mathcal{T}_0$:

$\mathcal{T}_2$:



Exercice 5 : (3 points)

Je suis une fonction du second degré

$f(x) = ax^2 + 4x + c$. Ma

tangente au point d'abscisse 2 est horizontale et a pour équation $y = -3$. Qui suis-je ? On donnera la réponse sous la forme $f(x) = ax^2 + 4x + c$.

Toute trace de recherche sera valorisée. Indication : penser à la forme canonique...

Bonus : (+1,25 points)

1. Qu'est ce que la stéganographie ? (en 2-3 lignes maximum)
2. Quelle est la différence entre la stéganographie et la cryptographie ?
3. En 1973, le boxeur américain Ken Norton disait : « Mohamed Ali trouvait horriblement efficaces mes attaques, très imprévisibles quelquefois, uniques et spectaculaires. ». Quel est le message caché dans cette citation ?
4. Pérec a camouflé le prénom de sa bien-aimée dans le texte qui termine l'article : comment s'appelait-elle ?

MATHEMATIQUES N°1

Exercice 1 : (5 points)

$$1. \alpha = \frac{-2}{2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-2}{-\frac{2}{3}} = -2 \times \frac{-3}{2} = 3$$

Le sommet a pour coordonnées (3 ; 4) (2)

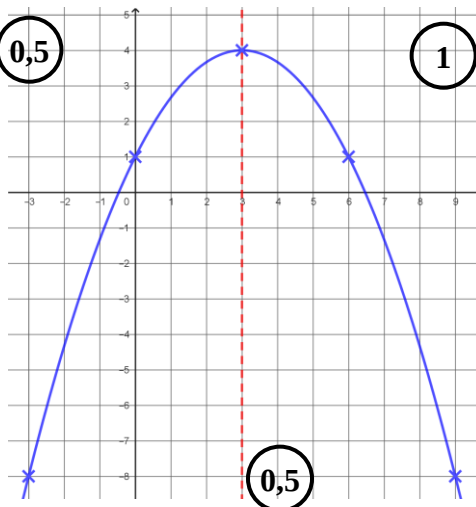
2. L'équation de l'axe de symétrie est $x = 3$ (0,5)

$$3. f(9) = -\frac{1}{3} \times 9^2 + 2 \times 9 + 1 = -27 + 18 + 1 = -8$$

Donc $A \in \mathcal{C}_f$. (1)

4. Il peut être judicieux d'ajouter des points tels que (-3 ; -8) (par symétrie) et (0 ; 1) avec son symétrique (6 ; 1).

$$\begin{aligned} \beta &= f(3) \\ &= -\frac{1}{3} \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 \\ &= -3 + 6 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$



Exercice 2 : (5 points)

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= 4x^2 - 40x + 108 \\ &= 4(x^2 - 10x + 25 - 25) + 108 \\ &= 4((x - 5)^2 - 25) + 108 \\ &= 4(x - 5)^2 - 100 + 108 \\ &= 4(x - 5)^2 + 8 \end{aligned} \quad (2,75)$$

$$2. \alpha = \frac{-(-42)}{2 \times (-7)} = \frac{42}{-14} = -3$$

Donc $g(x) = -7(x + 3)^2 - 3$ (2,25)

$$\begin{aligned} \beta &= -7 \times (-3)^2 - 42 \times (-3) - 66 \\ &= -63 + 126 - 66 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Exercice 3 : (5 points)

$$\begin{aligned} 1. \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{\frac{5}{3-2(1+h)} - \frac{5}{3-2 \times 1}}{h} \\ &= \left(\frac{5}{3-2-2h} - \frac{5}{1} \right) \times \frac{1}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{5}{1-2h} - \frac{5(1-2h)}{1-2h} \right) \times \frac{1}{h} \\ &= \left(\frac{5-5+10h}{1-2h} \right) \times \frac{1}{h} \end{aligned}$$

$$= \frac{10}{1-2h} \quad (2,5)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10}{1-2h} \\ &= \frac{10}{1-2 \times 0} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 10$. (1)

$$\begin{aligned} 2. T_1 : y &= 10(x - 1) + \frac{5}{3-2 \times 1} \\ &= 10x - 10 + 5 \\ &= 10x - 5 \end{aligned} \quad (1)$$

3. T_1 et T_2 sont parallèles puisqu'elles ont le même coefficient directeur. (0,5)

Exercice 4 : (2 points)

$$\begin{aligned} T_{-1} : y &= -0,5x + 4 \quad (0,5) \\ T_0 : y &= -2x + 3 \quad (0,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{1,2} : y &= 1,5 \quad (0,25) \\ T_2 : y &= 4x - 5 \quad (0,75) \end{aligned}$$

Exercice 5 : (3 points)

On sait que $\alpha = 2$ et $\beta = -3$ car le seul point d'une parabole en lequel la tangente est horizontale est son sommet. (1,25)

$$\text{De plus, } \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2a}$$

$$2 = \frac{-4}{2a}$$

$$2 \times 2a = -4$$

$$a = \frac{-4}{4} = -1 \quad (1,25)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= -1(x - 2)^2 - 3 \\ &= -1(x^2 - 4x + 4) - 3 \\ &= -x^2 + 4x - 4 - 3 \\ &= -x^2 + 4x - 7 \end{aligned} \quad (0,5)$$

Bonus : (+1,25 points)

1. La sténographie est l'art de cacher des messages, de rendre leur présence insoupçonnable. (+0,25)

2. En cryptographie, on code des messages et il faut une clé pour décoder. En sténographie, le message initial est compréhensible et on ne soupçonne généralement pas le message qu'il cache. (+0,5)

3. Le message caché est MATHEMATIQUES (1ère lettre de chaque mot). (+0,25)

4. Catherine (+0,25)