

MATHEMATIQUES N°9

Exercice 1 : (5 points)

Les résultats seront donnés sous forme exacte. Et on pensera à vérifier avec la calculatrice...

1. Calculer $I = \int_0^2 e^{5x} dx$ et $J = \int_1^3 \frac{2e^{3x}}{(e^{3x} + 1)^2} dx$ Il faudrait arriver à $J = \frac{2e^3(e^3 - 1)}{3(e^9 + 1)}$

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $K = \int_1^2 x \ln(2x) dx$.

Exercice 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + \cos(x))\sin(x)$

1. Montrer que f est 2π -périodique.
2. Etudier la parité de f .
3. Montrer que $f'(x) = (1 + \cos(x))(2 \cos(x) - 1)$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$
5. En déduire le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$

Exercice 3 : (5 points)

Dans une population donnée, on note p la proportion de personnes en accord avec un projet de loi. Cette proportion p est inconnue, mais on sait qu'elle se situe dans l'intervalle $[0,2 ; 0,8]$.

Pour chaque personne tirée au hasard dans cette population, on définit la variable aléatoire A valant 1 si cette personne est d'accord avec le projet de loi, et 0 sinon.

On suppose que les réponses des personnes sont toutes indépendantes entre elles.

1. Pour tout entier naturel n non nul, soit S_n la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille n de la loi de A .

a. Quelle est la loi de S_n ?

b. En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$, puis l'espérance et la variance de $F_n = \frac{S_n}{n}$, variable aléatoire donnant la fréquence des personnes disant « oui au projet de loi » dans un échantillon de taille n .

2. Soit δ un nombre réel. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de $p(|F_n - p| < \delta)$ en fonction de n , p et δ .

3. a. En utilisant les variations de la fonction f définie par $f(p) = p(1 - p)$, montrer que $p(1 - p) \geq 0,16$.

b. Donner une valeur de l'entier n telle que $p(|F_n - p| < 0,1) > 0,95$.

4. On effectue un sondage sur un échantillon de 350 personnes et on obtient une fréquence de « oui » de 0,6.

Si on se base sur cet échantillon pour en déduire que, dans cette population, une majorité est en faveur du projet de loi, quel est le risque d'erreur que l'on prend ?

Exercice 4 : (6 points)

Partie I

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^x$$

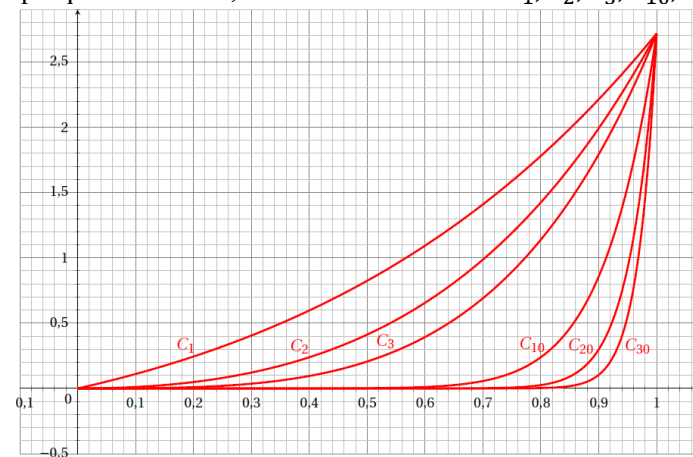
On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. a. On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $F_1(x) = (x - 1)e^x$.
Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1 .
- b. Calculer I_1 .
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir que $I_{n+1} = e - (n + 1)I_n$ pour tout $n \geq 1$.
3. Calculer I_2 .

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}$ et $\mathcal{C}_{30}$:



- a. Donner une interprétation graphique de I_n .
- b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$.

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Bonus : a. Expliquer comment obtenir une primitive de $f(x) = \sqrt{x}$ (qu'on « simplifiera »)

b. On pose $g(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$. Déterminer $g'(x)$.

c. Calculer $I = \int_3^7 3e^{2x} dx$.

MATHEMATIQUES N°9

Exercice 1 : (5 points)

$$I = \int_0^2 e^{5x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{5} e^{5x} \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{5} e^{10} - \frac{1}{5} e^0$$

$$= \frac{1}{5} e^{10} - \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$J = \int_1^3 \frac{2e^{3x}}{(e^{3x} + 1)^2} dx$$

$$= \left[\frac{-2}{3} \times \frac{1}{e^{3x} + 1} \right]_1^3$$

$$= \frac{-2}{3} \times \frac{1}{e^9 + 1} - \left(\frac{-2}{3} \times \frac{1}{e^3 + 1} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{-1}{e^9 + 1} + \frac{1}{e^3 + 1} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{-e^3 - 1 + e^9 + 1}{(e^9 + 1)(e^3 + 1)} \right)$$

$$= \frac{2e^3(e^6 - 1)}{3(e^9 + 1)(e^3 + 1)}$$

$$= \frac{2e^3(e^3 - 1)(e^3 + 1)}{3(e^9 + 1)(e^3 + 1)}$$

$$= \frac{2e^3(e^3 - 1)}{3(e^9 + 1)} \quad (2)$$

$$2. K = \int_1^2 x \ln(2x) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(2x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{2}{2x} dx$$

$$= \frac{2^2}{2} \times \ln(2 \times 2) - \frac{1}{2} \ln 2 - \left[\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= 2 \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 2 - \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{7}{2} \ln 2 - \frac{3}{4} \quad (2)$$

Exercice 2 : (4 points)

$$1. f(x + 2\pi) = (1 + \cos(x + 2\pi)) \sin(x + 2\pi)$$

$$= (1 + \cos(x)) \sin(x)$$

$$= f(x)$$

Donc f est 2π -périodique. (0,5)

$$2. f(-x) = (1 + \cos(-x)) \sin(-x)$$

$$= (1 + \cos(x)) (-\sin(x))$$

$$= -(1 + \cos(x)) \sin(x)$$

$$= -f(x)$$

f est donc impaire. (0,5)

$$3. f'(x) = -\sin(x) \sin(x) + \cos(x) (1 + \cos(x))$$

$$= -\sin^2(x) + \cos(x) + \cos^2(x)$$

$$= \cos^2(x) - 1 + \cos(x) + \cos^2(x)$$

$$= 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$$

$$\text{Or, } (1 + \cos(x))(2\cos(x) - 1) = 2\cos(x) - 1 + 2\cos^2(x) - \cos(x)$$

$$= 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$$

$$\text{Donc } f'(x) = (1 + \cos(x))(2\cos(x) - 1). \quad (1)$$

$$4. \text{ On a } 1 + \cos(x) \geq 0 \text{ car } \cos(x) \geq -1.$$

$$2\cos(x) - 1 \geq 0$$

$$2\cos(x) \geq 1$$

$$\cos(x) \geq \frac{1}{2}$$

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{3} \right] \quad (1,5)$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

5.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$		+		-
$f(x)$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

(0,5)

Exercice 3 : (5 points)

$$1. a. S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p). \quad (0,25)$$

$$b. \text{ On a } E(S_n) = np \text{ et } V(S_n) = np(1-p) \quad (0,5)$$

$$\text{Donc } E(F_n) = \frac{1}{n} E(S_n) = p \text{ et } V(F_n) = \frac{1}{n^2} E(S_n) = \frac{p(1-p)}{n} \quad (0,5)$$

$$2. \text{ D'après Bienaymé-Tchebychev, } p(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$$

$$1 - p(|F_n - p| \geq \delta) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \quad \text{c-a-d } p(|F_n - p| < \delta) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \quad (0,75)$$

$$3. a. f(p) = p(1-p) = p - p^2$$

$$f'(p) = 1 - 2p$$

$$1 - 2p = 0$$

$$1 = 2p \text{ et donc } \frac{1}{2} = p$$

p	0,2	0,5	0,8
$f'(p)$	+		-
$f(p)$			

$$f(0,2) = 0,2(1 - 0,2) = 0,16 \text{ et } f(0,8) = 0,8(1 - 0,8) = 0,16$$

Donc $p(1-p) \geq 0,16$ pour tout p compris entre 0,2 et 0,8. (1)

$$\text{b. On a } p(|F_n - p| < 0,1) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n0,1^2}$$

$$\text{Il faut donc que } 1 - \frac{p(1-p)}{n0,1^2} > 0,95$$

$$-\frac{p(1-p)}{n0,1^2} > 0,95 - 1$$

$$\frac{p(1-p)}{n0,1^2} < 0,05$$

$$\frac{p(1-p)}{0,05 \times 0,1^2} < n$$

$$\frac{0,16}{0,05 \times 0,1^2} \leq \frac{p(1-p)}{0,05 \times 0,1^2} < n$$

$$320 < n \quad (1,5)$$

Ainsi, si $n \geq 321$, c'est bon.

4. D'après la question précédente, avec $n = 350 \geq 321$ et $p = 0,6 \in [0,2 ; 0,8]$, on prend un risque d'erreur inférieur à 5 %.

(0,5)

Exercice 4 : (6 points)

Partie I

$$\begin{aligned} 1. \text{ a. } F_1'(x) &= 1e^x + e^x(x-1) \\ &= e^x + xe^x - e^x \\ &= f_1(x) \text{ donc } F_1 \text{ est une primitive de } f_1. \end{aligned}$$

(0,5)

$$\begin{aligned} \text{b. } I_1 &= \int_0^1 f_1(x) dx \\ &= [F_1(x)]_0^1 \\ &= (1-1)e^1 - (0-1)e^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(0,5)

$$\begin{aligned} 2. I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^x dx \\ &= [x^{n+1} e^x]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x dx \\ &= 1^{n+1} e^1 - 0^{n+1} e^0 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx \\ &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} 3. I_2 &= e - 2I_1 \\ &= e - 2 \times 1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

(0,5)

Partie II

1. a. I_n est l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses, $x = 0$ et $x = 1$.

(0,25)

b. (I_n) semble tendre vers 0.

(0,25)

2. On a $0 \leq x \leq 1$

$$e^0 \leq e^x \leq e^1$$

Et donc $0 \leq 1 \leq e^x \leq e$

$$0 \leq e^x x^n \leq e x^n \text{ car } x^n \geq 0.$$

$$0 \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 e x^n dx$$

$$0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx$$

(1,5)

$$3. \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

(1,5)

$$\text{Bonus : a. } f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$$

(+0,25)

$$\text{b. } g'(x) = e^{-x^2}$$

(+0,25)

$$\text{c. Calculer } I = 3e^{2x}(7-3) = 12e^{2x}$$

(+0,25)