

MATHEMATIQUES N°9

Remarque : dans tout ce contrôle, on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

Exercice 1 : (3,5 points)

(d) est la droite d'équation $5x + 3y - 7 = 0$.

- Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) et passant par le point A(5 ; 2)
- H est le projeté orthogonal de A sur (d). Déterminer les coordonnées de H.

Exercice 2 : (5,5 points)

On considère les points A (-5; 3), B (1; 7) et C (-3; 5).

- Déterminer une équation cartésienne de la hauteur (d) issue de A dans le triangle ABC. *Rappel : une hauteur passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet...*
- Déterminer une équation cartésienne de (Δ) la médiatrice du segment [AC].
Rappel : une médiatrice passe par le milieu d'un segment et est perpendiculaire à ce segment.
- Déterminer une équation du cercle C de diamètre [AB].

Exercice 3 : (2 points)

On donne l'équation (E) : $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 3 = 0$. Démontrer que (E) est l'équation d'un cercle, dont on précisera le centre A et le rayon.

Exercice 4 : (2 points)

Soit les points A(-1 ; 2) et B(2; 7) .

Déterminer les coordonnées du point C de telle sorte que C appartienne à l'axe des abscisses et que le triangle ABC soit rectangle en A.

Exercice 5 : (2 points)

Soit les points A(0 ; 3) ; B(4 ; m) et C(m - 2 ; 5) dans un repère orthonormé. Déterminer le réel m pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

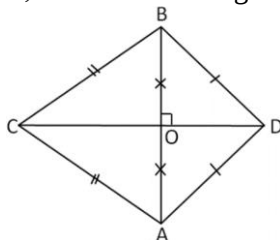
Exercice 6 : (5 points)

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de côté 6, ABD est un triangle isocèle en D tel que $AD = 3\sqrt{3}$, O est le milieu de [AB] et $(CD) \perp (AB)$.

- Montrer que $OC = 3\sqrt{3}$ et $OD = 3\sqrt{2}$

- Calculer chaque produit scalaire en détaillant les étapes :

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ b) $\vec{CO} \cdot \vec{BD}$ c) $\vec{OA} \cdot \vec{DB}$ d) $\vec{CA} \cdot \vec{BD}$



Bonus : quelle citation de Jimmy Hendrix introduit le cahier MathematicA ?

MATHEMATIQUES N°9

Remarque : dans tout ce contrôle, on se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

Exercice 1 : (3,5 points)

(d) est la droite d'équation $5x + 3y - 7 = 0$.

- Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) et passant par le point A(5 ; 2)
- H est le projeté orthogonal de A sur (d). Déterminer les coordonnées de H.

Exercice 2 : (5,5 points)

On considère les points A (-5; 3), B (1; 7) et C (-3; 5).

- Déterminer une équation cartésienne de la hauteur (d) issue de A dans le triangle ABC. *Rappel : une hauteur passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet...*
- Déterminer une équation cartésienne de (Δ) la médiatrice du segment [AC].
Rappel : une médiatrice passe par le milieu d'un segment et est perpendiculaire à ce segment.
- Déterminer une équation du cercle C de diamètre [AB].

Exercice 3 : (2 points)

On donne l'équation (E) : $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 3 = 0$. Démontrer que (E) est l'équation d'un cercle, dont on précisera le centre A et le rayon.

Exercice 4 : (2 points)

Soit les points A(-1 ; 2) et B(2; 7) .

Déterminer les coordonnées du point C de telle sorte que C appartienne à l'axe des abscisses et que le triangle ABC soit rectangle en A.

Exercice 5 : (2 points)

Soit les points A(0 ; 3) ; B(4 ; m) et C(m - 2 ; 5) dans un repère orthonormé. Déterminer le réel m pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

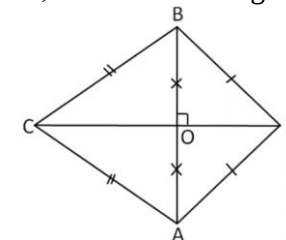
Exercice 6 : (5 points)

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de côté 6, ABD est un triangle isocèle en D tel que $AD = 3\sqrt{3}$, O est le milieu de [AB] et $(CD) \perp (AB)$.

- Montrer que $OC = 3\sqrt{3}$ et $OD = 3\sqrt{2}$

- Calculer chaque produit scalaire en détaillant les étapes :

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ b) $\vec{CO} \cdot \vec{BD}$ c) $\vec{OA} \cdot \vec{DB}$ d) $\vec{CA} \cdot \vec{BD}$



Bonus : quelle citation de Jimmy Hendrix introduit le cahier MathematicA ?

MATHEMATIQUES N°9

Exercice 1 : (3,5 points)

1) $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite (d) .

(Δ) est perpendiculaire à (d) donc le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ) .

On alors $(\Delta) : 3x - 5y + c = 0$.

Or $A(5 ; 2) \in (\Delta)$ donc $3 \times 5 - 5 \times 2 + c = 0$

$$5 + c = 0$$

$$c = -5$$

Donc $(\Delta) : 3x - 5y - 5 = 0$. **(1,5)**

2. Soit $H(x ; y)$ le point d'intersection de (d) et $(\Delta) : \begin{cases} 5x + 3y - 7 = 0 \\ 3x - 5y - 5 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 15x + 9y = 21 \\ 15x - 25y = 25 \end{cases}$$

$$L_1 - L_2 : 34y = -4$$

$$y = \frac{-4}{34} = \frac{-2}{17}$$

$$L_1 : 5x + 3 \times \frac{-2}{17} = 7$$

$$5x = 7 + \frac{6}{17} = \frac{125}{17}$$

$$x = \frac{125}{17} \times \frac{1}{5} = \frac{25}{17}$$

Donc $H\left(\frac{25}{17} ; \frac{-2}{17}\right)$ **(2)**

Exercice 2 : (5,5 points)

1. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -3 - 1 \\ 5 - 7 \end{pmatrix} \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est normal à (d) .

On a alors $(d) : -4x - 2y + c = 0$.

Et puisque $A(-5 ; 3) \in (d)$ alors $-4 \times (-5) - 2 \times 3 + c = 0$

$$20 - 6 + c = 0$$

$$14 + c = 0$$

$$c = -14$$

Ainsi, $(d) : -4x - 2y - 14 = 0$ **(1,5)**

$$(d) : 2x + y + 7 = 0$$

2. Soit M le milieu de $[AC]$. $M\left(\frac{-5 - 3}{2} ; \frac{3 + 5}{2}\right)$ $M(-4 ; 4)$

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 + 5 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à (Δ) .

Donc $(\Delta) : 2x + 2y + c = 0$

Or $M(-4 ; 4) \in (\Delta)$ donc $2 \times (-4) + 2 \times 4 + c = 0$

$$-8 + 8 + c = 0$$

$$c = 0$$

Donc $(\Delta) : 2x + 2y = 0$

$$(\Delta) : x + y = 0$$
 (2)

3. Soit Ω le milieu de $[AB]$. $\Omega\left(\frac{-5 + 1}{2} ; \frac{3 + 7}{2}\right)$ $M(-2 ; 5)$

$$AB^2 = (1 + 5)^2 + (7 - 3)^2$$

$$= 6^2 + 4^2$$

$$= 36 + 16$$

$$= 52$$

$$D'où R = \frac{\sqrt{52}}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Donc } C : (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 13$$
 (2)

Exercice 3 : (2 points)

(E) : $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 3 = 0$

$$(x - 6)^2 - 36 + (y + 5)^2 - 25 - 3 = 0$$

$$(x - 6)^2 + (y - (-5))^2 = 64$$

$$(x - 6)^2 + (y - (-5))^2 = 8^2$$

(E) est donc l'équation du cercle de centre $\Omega(6 ; -5)$ et de rayon 8. **(2)**

Exercice 4 : (2 points)

Puisque C appartient à l'axe des abscisses, ses coordonnées sont $(x ; 0)$.

De plus, ABC est rectangle en A si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ 7 - 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x + 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On a donc $3(x + 1) + 5 \times (-2) = 0$

$$3x + 3 - 10 = 0$$

$$3x - 7 = 0$$

$$3x = 7 \text{ et donc } x = \frac{7}{3}$$

Le point C a donc pour coordonnées $\left(\frac{7}{3} ; 0\right)$. **(2)**

Exercice 5 : (2 points)

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ m - 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ m - 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} m - 2 - 0 \\ 5 - 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} m - 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4(m - 2) + 2(m - 3)$$

On doit donc avoir $0 = 4m - 8 + 2m - 6$

$$8 + 6 = 6m$$

$$\frac{14}{6} = m \text{ c'est-à-dire } m = \frac{7}{3}$$
 (2)

Exercice 6 : (5 points)

1. D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = BO^2 + OC^2$$

$$6^2 = 3^2 + OC^2$$

$$36 - 9 = OC^2$$

$$OC^2 = 27$$

$$OC = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \quad (0,75)$$

$$BD^2 = BO^2 + OD^2$$

$$(3\sqrt{3})^2 = 3^2 + OD^2$$

$$27 - 9 = OD^2$$

$$OD^2 = 18$$

$$OD = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad (0,75)$$

$$2. a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 6 \times 6 \times \frac{1}{2}$$

$$= 18 \quad (0,75)$$

$$b) \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OD} \text{ par proj. orth.}$$

$$= CO \times OD$$

$$= 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}$$

$$= 9\sqrt{6} \quad (1)$$

$$c) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \text{ par proj. orth.}$$

$$= -OA \times OB$$

$$= -3 \times 3$$

$$= -9 \quad (1)$$

$$d) \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{BD}$$

$$= \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BD}$$

$$= 9\sqrt{6} + 9 \quad (0,75)$$

Bonus : « La connaissance parle, mais la sagesse écoute. » (+0,5)

⇒ mot à mot, sinon +0,25