

MATHEMATIQUES N°8

Remarques : Les exercices peuvent être faits dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 : (5,5 points)

- On pose $A = 28$, $B = 1\,617$ et $C = 10\,400$. Décomposer A , B et C en produit de facteurs premiers en indiquant les étapes de décomposition.
- Démontrer que $D = 53\,625$, $E = 785\,487$ et $F = 913\,523$ ne sont pas premiers.
- En rédigeant, expliquer pourquoi 967 est un nombre premier.
- Donner la liste des diviseurs positifs de 60.

Exercice 2 : (4 points)

Considérons la série suivante : $15 - 7 - 6 - 11 - 12 - 9$

En indiquant les calculs, déterminer $\bar{x}$, σ , Q_1 et la médiane (arrondir au dixième).

Exercice 3 : (2 points)

Montrer que si n est impair, alors $n^2 - 1$ est un multiple de 4.

Exercice 4 : (2 points)

1. Voici les 35 notes du 1^{er} contrôle du troisième trimestre :

Note	2	5	6	8	10	11	12	14	15	17	18	20
Effectif	1	2	2	2	6	2	4	3	4	5	3	1

A l'aide de la calculatrice, sans indiquer le moindre calcul, déterminer $\bar{x}$ et σ .

2. Lors du second contrôle, $\bar{x} = 11$ et $\sigma \approx 1,5$. Interpréter mes résultats de ce second contrôle en termes d'intervalle / de pourcentages.

Exercice 5 : (2,5 points)

On observe que, par exemple, le nombre impair 29 s'écrit $29 = 15^2 - 14^2$.

1. a. Développer $H = (k + 1)^2 - k^2$.

b. En déduire que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.

2. A l'aide de la question 1, décomposer les nombres $I = 13$ et $J = 2\,031$ en différence de carrés de deux entiers consécutifs.

Exercice 6 : (3 points)

Soient a et b deux entiers naturels. Démontrer que si a est divisible par 16 et b est divisible par 9 alors $c = a(b + 3)^2$ est divisible par 36.

Exercice 7 : (1 points)

Simon affirme : « Les diviseurs positifs d'un entier naturel $n \geq 2$ marchent toujours par deux : si a est un diviseur de n , il existe un diviseur b de n tel que $ab = n$. Un entier a donc toujours un nombre pair de diviseurs positifs. ». Que peut-on penser de ce raisonnement ?

Bonus :

- Grosso modo, Euclide, c'était quelle époque ?
- Cite une chose pour laquelle il est connu, selon l'article.
- Qu'est-ce que le PGCD ?
- « Si a et b sont deux nombres entiers et d leur PGCD, il existe deux entiers u et v tels que $a \times u + b \times v = d$ » : à qui doit-on ce théorème ?
- Qu'est-ce que $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$?
- L'article cite « le petit théorème de ... » Le petit théorème de qui ?
- En expliquant la démarche, expliquer pourquoi 6 063 827 est divisible par 11. (la calculatrice n'est pas une explication)



MATHEMATIQUES N°8

Exercice 1 : (5,5 points)

$$\begin{array}{lll}
 1. A = 28 & B = 1\ 617 & C = 10\ 400 \\
 = 4 \times 7 & = 3 \times 539 & = 104 \times 100 \\
 = 2^2 \times 7 & = 3 \times 7 \times 77 & = 2 \times 52 \times 10 \times 10 \\
 & = 3 \times 7 \times 7 \times 11 & = 2 \times 2 \times 2 \times 13 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \\
 & = 3 \times 7^2 \times 11 & = 2^5 \times 5^2 \times 13
 \end{array}$$

2. $\rightarrow 53\ 625$ est un multiple de 5 et il n'est donc pas premier.
 $\rightarrow 7 + 8 + 5 + 4 + 8 + 7 = 39$
 39 est un multiple de 3 donc 785 478 aussi : il n'est donc pas premier.
 $\rightarrow 913\ 523 = 13 \times 70\ 271$ donc il n'est pas premier.

3. $\sqrt{967} \approx 31,1$

On peut vérifier que 967 n'est pas dans la table de 2 / 3 / 5 / 7 / 11 / 13 / 17 / 19 / 23 / 29 / 31. Donc 967 est premier.

4. Les diviseurs de 60 sont 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 10 / 12 / 15 / 20 / 30 / 60.

Exercice 2 : (4 points)

On a $\bar{x} = \frac{15 + 7 + 6 + 11 + 12 + 9}{6} = 10$

$v = \frac{(15 - 10)^2 + (7 - 10)^2 + (6 - 10)^2 + (11 - 10)^2 + (12 - 10)^2 + (9 - 10)^2}{6} = \frac{56}{6}$

D'où $\sigma = \sqrt{\frac{56}{6}} \approx 3,1$

Voilà la série classée : 6 - 7 - 9 - 11 - 12 - 15

6 : 4 = 1,5 donc Q_1 est la 2^{ème} valeur. D'où $Q_1 = 7$.

Et 6 : 2 = 3 donc la médiane est entre la 3^{ème} et la 4^{ème} valeur.

D'où médiane = 10.

Exercice 3 : (2 points)

Soit n un nombre impair : on a donc $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 n^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 \\
 &= 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\
 &= 4k^2 + 4k \\
 &= 4(k^2 + k)
 \end{aligned}$$

Donc $n^2 - 1$ est un multiple de 4.

Exercice 4 : (2 points)

1. On obtient $\bar{x} \approx 12,3$ et $\sigma \approx 4,37$.

2. On peut dire que 68% des élèves ont obtenu des notes entre 9,5 et 12,5. Et 95% des élèves ont des notes entre 8 et 14.

Exercice 5 : (3 points)

1. a. $H = (k + 1)^2 - k^2$
 $= k^2 + 2k + 1 - k^2$
 $= 2k + 1$

b. Soit n un nombre impair : on peut donc écrire $n = 2k + 1$.
 D'après 1. a., on a donc $n = (k + 1)^2 - k^2$: n est donc bien la différence des carrés de deux entiers consécutifs.

2. $I = 13 = 2 \times 6 + 1$
 $= (6 + 1)^2 - 6^2$
 $= 7^2 - 6^2$

$J = 2\ 031 = 2 \times 1\ 015 + 1$
 $= (1\ 015 + 1)^2 - 1\ 015^2$
 $= 1\ 016^2 - 1\ 015^2$

Exercice 6 : (2,5 points)

On a $a = 16k_1$ avec $k_1 \in \mathbb{N}$ et $b = 9k_2$ avec $k_2 \in \mathbb{N}$.

D'où $c = a(b + 3)^2$
 $= 16k_1(9k_2 + 3)^2$
 $= 4 \times 4k_1(3(3k_2 + 1))^2$
 $= 4 \times 4k_1 \times 3^2(3k_2 + 1)^2$
 $= 36 \times 4k_1(3k_2 + 1)^2$

Donc c est divisible par 36.

Exercice 7 : (1 points)

Malheureusement, c'est faux : prenons 25.

Les diviseurs de 25 sont 1 / 5 / 25 : il y en a donc trois, c'est-à-dire un nombre impair. C'est le cas de tous les carrés : leur nombre de diviseurs est impair.

Bonus : a. Euclide, c'est 325-265 av JC (3^{ème} ou 4^{ème} siècle av JC acceptés)

b. « Les éléments » et « L'algorithme d'Euclide »

c. Le plus grand diviseur commun

d. Bézout.

e. $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, c'est l'anneau des entiers modulo N . Grosso modo, c'est l'ensemble des nombres entiers compris entre 0 et $N - 1$.

f. « le petit théorème de ... » Fermat

g. $7 - 2 + 8 - 3 + 6 - 0 + 6 = 22$

Or, 22 est divisible par 11 donc 6 063 827 est divisible par 11.