

MATHEMATIQUES N°8

Remarque : ultra classique ; attention au soin et à la rédaction...

Exercice 1 : (3 points)

Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché français un nouveau jouet destiné aux écoliers.

On note x le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire. Les ventes espérées en milliers de jouets ont été modélisées par la fonction f définie sur $[0 ; 18]$ par $f(x) = 5xe^{-0,2x}$.

1. Montrer que $f'(x) = (5 - x)e^{-0,2x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 18]$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 18]$.
3. Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint. Préciser la valeur de ce maximum, arrondie à l'unité.

Exercice 2 : (4,5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Vérifier que $\frac{3(e^x - 5)}{e^x - 3} = 5 - \frac{2}{1 - 3e^x}$
2. Résoudre l'inéquation $5 - 2e^{3x-1} < 3$
3. Résoudre l'équation $3e^{2x} + 2e^x - 5 = 0$

Exercice 3 : (5,5 points)

Au jeu de grattage Karott, la Française des Escrocs (FdE) émet 1 500 000 tickets, chacun au prix de 3 €. Les différents lots sont ainsi répartis :

Nombre de lots	8	200	800	9 000	45 000	153 000	122 000
Montant des lots (en €)	2 000	100	50	14	7	2	1

- 1° a. Calculer la recette de la FdE lorsqu'elle si elle vend tous les billets.
b. Quelle somme totale est redistribuée aux joueurs ? Calculer la part en pourcentage de cette redistribution par rapport à la recette de la FdE.
- 2° Calculer la probabilité de gagner le montant maximum, et la probabilité de ne rien gagner à ce jeu. On donnera les résultats sous forme de pourcentages arrondis au centième.
- 3° On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

- a. Donner la loi de probabilité de X .
- b. Donner la valeur exacte du gain moyen (le calcul n'est pas demandé) et interpréter la réponse

Exercice 4 : (5 points)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient 8 boules blanches et n boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. Moyennant un coût de 2 €, un joueur tire avec remise deux boules de l'urne. Il en examine la couleur. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 6 € et pour chaque boule noire tirée, il perd 9 €.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

1° Réaliser un arbre de probabilités correspondant à cette expérience.

2° a. Quels sont les gains algébriques possibles à ce jeu ?

b. Déterminer la loi de G .

3° Montrer que $E(G) = \frac{-20n^2 - 80n + 640}{(n + 8)^2}$

4° Existe-t-il une valeur de n telle que le jeu soit équitable ?

Exercice 5 : (2 points)

Une variable aléatoire X a la loi de probabilité suivante :

x_i	-2	-1	5
p_i	0,5	0,4	0,1

1° Calculer $E(X)$.

2° Calculer σ_X au centième près. Une réponse sans calcul ne rapportera pas de points.

- Bonus** :
- a. Déterminer les mots manquants : *Hormis les cas d'école comme les jeux de hasard, c'est bien souvent la obtenue lors d'un . . . nombre d'essais qui permet de déterminer une probabilité.*
 - b. Lorsqu'on joue à la roulette (dont les cases sont numérotées de 0 à 36) au casino et qu'on mise x €, quelle est l'espérance de gain ?
 - c. Lorsqu'on parle d'une variable aléatoire X , que représente x_i ? Et que signifie p_i ?
 - d. Que vaut $E(aX)$ lorsque a est un nombre réel ?

MATHEMATIQUES N°8

Exercice 1 : (3 points)

$$\begin{aligned} 1. f'(x) &= 5e^{-0,2x} + 5xe^{-0,2x} \times (-0,2) \\ &= e^{-0,2x}(5 + 5x \times (-0,2)) \\ &= e^{-0,2x}(5 - x) \end{aligned}$$

(0,75)

2. Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement de $5 - x$ car $e^{-0,2x} > 0$.

x	0	5	18
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\approx 9,2$	$\approx 2,5$

(1)

3. Le maximum de ventes par jour est atteint au bout de 5 jours.

Il faut penser à multiplier par 1 000 pour avoir le nombre de jouets, et on obtient 9 197 jouets par arrondi à l'unité.

(1,25)

Exercice 2 : (4,5 points)

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a } 5 - \frac{2}{1 - 3e^{-x}} &= \frac{5(1 - 3e^{-x}) - 2}{1 - 3e^{-x}} \\ &= \frac{5 - 15e^{-x} - 2}{1 - 3e^{-x}} \\ &= \frac{3 - 15e^{-x}}{1 - 3e^{-x}} \\ &= \frac{(3 - 15e^{-x})e^x}{(1 - 3e^{-x})e^x} \\ &= \frac{3e^x - 15}{e^x - 3} \\ &= \frac{3(e^x - 5)}{e^x - 3} \end{aligned}$$

(1,25)

$$2. \text{ On a } 5 - 2e^{3x-1} < 3$$

$$5 - 3 < 2e^{3x-1}$$

$$\frac{2}{2} < e^{3x-1}$$

$$1 < e^{3x-1}$$

$$e^0 < e^{3x-1}$$

$$0 < 3x - 1$$

$$1 < 3x$$

$$\frac{1}{3} < x$$

$$x \in \left] \frac{1}{3} ; +\infty \right[\quad (1,25)$$

3. On pose $X = e^x$

L'équation devient $3X^2 + 2X - 5 = 0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5)$$

$$= 4 + 60$$

$$= 64$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } X_1 &= \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times 3} \\ &= \frac{-2 - 8}{6} \\ &= -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } X_2 &= \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times 3} \\ &= \frac{-2 + 8}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Or, une exponentielle est toujours positive, donc la seule possibilité est $X = 1$.

Et donc $e^x = 1$. D'où $x = 0$.

(2)

Exercice 3 : (5,5 points)

1° a. $1\,500\,000 \times 3 = 4\,500\,000$ €

Lorsqu'elle vend tous les billets, la recette de la Française des Escrocs est de

4 500 000 €

(0,5)

$$8 \times 2\,000 + 200 \times 100 + 800 \times 50 + 9\,000 \times 14 + 45\,000 \times 7 + 153\,000 \times 2 + 122\,000 \times 1 = 945\,000 \text{ €}$$

(0,25)

$$\frac{945\,000}{4\,500\,000} \times 100 = 21$$

La redistribution est de 21% des recettes.

(0,75)

$$2^\circ \frac{8}{1\,500\,000} \approx 0,000\,005$$

La probabilité de gagner le montant maximum est d'environ 0,00 % !

(0,5)

$$1\,500\,000 - (8 + 200 + 800 + 9\,000 + 45\,000 + 153\,000 + 122\,000) = 1\,169\,992$$

$$\frac{1\,169\,992}{1\,500\,000} \approx 0,779\,995$$

La probabilité de ne rien gagner à ce jeu est d'environ 78,00 %

(1)

3° a. Loi de X :

x_i	1 997	97	47	11	4	-1	-2	-3
p_i	$\frac{8}{1\,500\,000}$	$\frac{200}{1\,500\,000}$	$\frac{800}{1\,500\,000}$	$\frac{9\,000}{1\,500\,000}$	$\frac{45\,000}{1\,500\,000}$	$\frac{153\,000}{1\,500\,000}$	$\frac{122\,000}{1\,500\,000}$	$\frac{1\,169\,992}{1\,500\,000}$

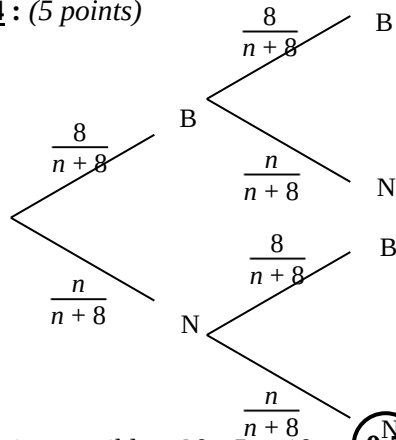
(1,5)

b. On obtient $E(X) = -2,37$ en utilisant les valeurs exactes.
Le joueur perd donc en moyenne 2,37 € par jeu.

(1)

Exercice 4 : (5 points)

1°



(0,5)

2° a. Les gains possibles -20, -5 et 10.

(0,5)

b. Voici la loi de G :

g_i	-20	-5	10
p_i	$\frac{n^2}{(n+8)^2}$	$\frac{16n}{(n+8)^2}$	$\frac{64}{(n+8)^2}$

(1,5)

$$3^\circ E(G) = -20 \times \frac{n^2}{(n+8)^2} - 5 \times \frac{16n}{(n+8)^2} + 10 \times \frac{64}{(n+8)^2}$$

$$= \frac{-20n^2 - 80n + 640}{(n+8)^2}$$

(0,5)

4° On cherche à savoir s'il est possible que $E(G) = 0$

Cela revient à $-20n^2 - 80n + 640 = 0$

$$n^2 + 4n - 32 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-32)$$

$$= 16 + 128$$

$$= 144$$

$$\text{D'où : } n_1 = \frac{-4 - \sqrt{144}}{2 \times 1} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-4 + \sqrt{144}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-4 - 12}{2}$$

$$= -8$$

$$= \frac{-4 + 12}{2}$$

$$= 4$$

Or, n est un nombre plus grand ou égal à 2 : la seule possibilité est donc $n = 4$.

(2)

Exercice 5 : (2 points)

$$1^\circ E(X) = -2 \times 0,5 + (-1) \times 0,4 + 5 \times 0,1$$

$$= -1 - 0,4 + 0,5$$

$$= -0,9$$

(0,75)

$$2^\circ V(X) = 0,5(-2 - (-0,9))^2 + 0,4(-1 - (-0,9))^2 + 0,1(5 - (-0,9))^2$$

$$= 0,5(-1,1)^2 + 0,4(-0,1)^2 + 0,1(5,9)^2$$

$$= 0,5 \times 1,21 + 0,4 \times 0,01 + 0,1 \times 34,81$$

$$= 4,09$$

$$\sigma_X = \sqrt{4,09} \approx 2,02$$

(1,25)

Bonus : a. *Hormis les cas d'école comme les jeux de hasard, c'est bien souvent la fréquence obtenue lors d'un grand nombre d'essais qui permet de déterminer une probabilité.*

b. L'espérance du gain est $-\frac{x}{37}$

c. x_i représente les valeurs que X peut prendre.

$$p_i = p(X = x_i)$$

$$d. E(aX) = aE(X)$$

(+0,25)