

MATHEMATIQUES N°8

Exercice 1 : (2,5 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2xe^{2x} + 1$. Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f'(0) = 1$.

Exercice 2 : (5,5 points)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3e^{2-5x} \qquad g(x) = \frac{5e^{3x}}{7 + 2e^{3x}} \qquad h(x) = \frac{7x}{3\sqrt{5x^2 + 1}}$$

$$i(x) = \frac{2}{5(4 - 3x)^2}$$

Exercice 3 : (5,5 points)

1. Résoudre l'inéquation $\ln(x - 2) + \ln(x - 3) \leq 2 \ln(\sqrt{12})$
2. Avec une pièce truquée, la probabilité d'obtenir « Pile » est 0,63. Combien de fois faut-il la lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois « Pile » dépasse 98,5% ?

Exercice 4 : (6,5 points)

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2. Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « Le candidat répond correctement à la question Q1 » ;
- B l'évènement : « Le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note $\bar{A}$ et $\bar{B}$ les évènements contraires de A et de B .

1. Réaliser un arbre de probabilités correspondant à cette situation.
2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1
 - X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2
 - X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$
4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2 . En déduire l'espérance de X . Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
 5. On souhaite déterminer la variance de X .
 - a. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$.
 - b. Montrer que la variance de X vaut 0,57.

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point. Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de $P(Y = 8)$.
3. Donner l'espérance et la variance de Y .

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : on a donc $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance et l'écart-type de Z .
2. Interpréter les valeurs obtenues.

- Bonus** :
- a. Compléter les noms de ces paradoxes de Zénon : « *Achille et ...* » & « *Achille et ...* ».
 - b. Qu'est-ce que l'infini « actuel » ? A quel infini s'oppose-t-il ?
 - c. Qui a défini rigoureusement la notion de somme infinie au XIX^{ème} siècle ?
 - d. Qui a démontré l'existence de nombre transcendants ? Et qu'est-ce qu'un nombre transcendant... ?
 - e. Que vaut la somme $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$? Expliquer.

MATHEMATIQUES N°8

Exercice 1 : (2,5 points)

$$1. u'(x) = 2e^{2x} + 2e^{2x} \times 2x$$

$$= 2e^{2x} + 4xe^{2x}$$

$$u'(x) - 2u(x) = 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2(2xe^{2x} + 1)$$

$$= 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 4xe^{2x} - 2$$

$$= 2(e^{2x} - 1)$$

Donc u est une solution de (E). (0,75)

2. Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme ke^{2x} où $k \in \mathbb{R}$. (0,25)

3. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $ke^{2x} + 2xe^{2x} + 1$ où $k \in \mathbb{R}$. (0,5)

$$4. \text{ On a } f'(x) = 2f(x) + 2(e^{2x} - 1)$$

$$\text{D'où } f'(0) = 2f(0) + 2(e^0 - 1) = 1$$

$$2(ke^0 + 0 + 1) + 2 \times 0 = 1$$

$$2(k + 1) = 1$$

$$k + 1 = \frac{1}{2}$$

$$k = 0,5 - 1 = -0,5$$

$$\text{Donc } f(x) = -0,5e^{2x} + 2xe^{2x} + 1. (1)$$

Exercice 2 : (5,5 points)

$$f(x) = 3e^{2-5x}$$

$$= \frac{3}{-5} \times (-5)e^{2-5x}$$

$$F(x) = \frac{-3}{5}e^{2-5x} (1)$$

$$h(x) = \frac{7x}{3\sqrt{5x^2+1}}$$

$$= \frac{7}{3} \times \frac{1}{10} \times \frac{10x}{2\sqrt{5x^2+1}}$$

$$H(x) = \frac{7}{15}\sqrt{5x^2+1} (1,5)$$

$$g(x) = \frac{5e^{3x}}{7+2e^{3x}}$$

$$= \frac{5}{6} \times \frac{6e^{3x}}{7+2e^{3x}}$$

$$G(x) = \frac{5}{6} \ln(7+2e^{3x}) (1,5)$$

$$i(x) = \frac{2}{5(4-3x)^2}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{-(-3)}{(4-3x)^2}$$

$$I(x) = \frac{2}{15} \times \frac{1}{4-3x} (1,5)$$

Exercice 3 : (5,5 points)

1. Il faut que $x - 2 > 0$ et $x - 3 > 0$

$$x > 2 \quad x > 3$$

Donc $\mathcal{D} =]3; +\infty[(0,5)$

$$\ln(x-2) + \ln(x-3) \leq 2\ln(\sqrt{12})$$

$$\ln((x-2)(x-3)) \leq \ln 12$$

$$(x-2)(x-3) \leq 12$$

$$x^2 - 3x - 2x + 6 - 12 \leq 0$$

$$x^2 - 5x - 6 \leq 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-6) \quad x_1 = \frac{5-7}{2}$$

$$= 25 + 24$$

$$= 49$$

$$x_1 = \frac{5-7}{2}$$

$$= \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{5+7}{2}$$

$$= \frac{12}{2} = 6$$

Donc $x \in [-1; 6]$

D'où $\mathcal{S} =]3; 6] (2)$

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque série de n lancers, associe le nombre de « Pile » obtenus. On peut dire que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 0,63) (0,5)$

$$p(X \geq 1) \geq 0,985 \Leftrightarrow 1 - p(X = 0) \geq 0,985$$

$$\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \times 0,63^0 \times 0,37^{n-0} \geq 0,985$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,37^n \geq 0,985$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,985 \geq 0,37^n$$

$$\Leftrightarrow 0,015 \geq 0,37^n$$

$$\Leftrightarrow \ln 0,015 \geq n \ln 0,37$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 0,015}{\ln 0,37} \leq n \text{ car } \ln 0,37 < 0$$

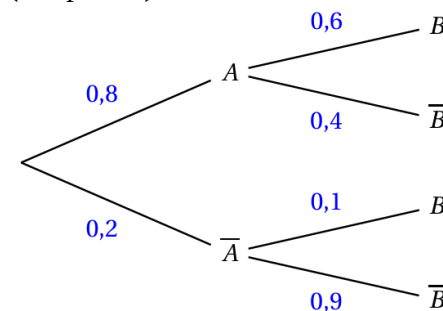
$$\Leftrightarrow 4,22 \leq n (2,5)$$

Il faut donc faire au moins 5 lancers.

Exercice 4 : (6,5 points)

Partie I

1.



(0,5)

$$2. P(A \cap B) = 0,8 \times 0,6 = 0,48 \quad (0,25)$$

$$3. P(B) = 0,48 + 0,2 \times 0,1 = 0,5 \quad (0,5)$$

4. La loi de probabilité de X_1 est :

x_i	0	1
p_i	0,2	0,8

$$\text{Donc } E(X_1) = 0 \times 0,2 + 1 \times 0,8 = 0,8 \quad (0,25)$$

La loi de probabilité de X_2 est :

x_i	0	1
p_i	0,5	0,5

$$\text{Donc } E(X_2) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,5 = 0,5 \quad (0,25)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2) \\ &= E(X_1) + E(X_2) \\ &= 0,8 + 0,5 \\ &= 1,3 \end{aligned} \quad (0,25)$$

En moyenne, un élève obtient la note de 1,3 à l'exercice 1. (0,25)

$$\begin{aligned} 5. a. P(X = 0) &= P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,2 \times 0,9 = 0,18 \\ P(X = 2) &= P(A \cap B) = 0,48 \\ P(X = 1) &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 2)) \\ &= 1 - (0,18 + 0,48) \\ &= 0,34 \end{aligned}$$

On peut donc en déduire la loi de probabilité de X :

x_i	0	1	2
p_i	0,18	0,34	0,48

(1)

$$b. V(X) = 0,18(0 - 1,3)^2 + 0,34(1 - 1,3)^2 + 0,48(2 - 1,3)^2 = 0,57 \quad (0,5)$$

Partie II

1. On répète 8 épreuves identiques et indépendante et Y compte le nombre de succès.

$$\text{Par conséquent, } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(8; \frac{3}{4}\right). \quad (0,5)$$

$$2. p(Y = 8) = \binom{8}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^8 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \left(\frac{3}{4}\right)^8 \quad (0,25)$$

$$3. E(Y) = 8 \times \frac{3}{4} = 6$$

$$V(Y) = 8 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 1,5 \quad (0,5)$$

Partie III

$$\begin{aligned} 1. E(Z) &= E(X) + E(Y) \\ &= 1,3 + 6 \\ &= 7,3 \end{aligned} \quad (0,25)$$

$$\begin{aligned} V(Z) &= V(X) + V(Y) \text{ car les variables sont indépendantes} \\ &= 0,57 + 1,5 \\ &= 2,07 \end{aligned}$$

$$\sigma(Z) = \sqrt{2,07} \approx 1,44 \quad (0,5)$$

2. En moyenne, un candidat répond à 7,3 questions correctement. (0,25)

On a environ 68% des candidats qui auront entre 5,86 et 8,74 bonnes réponses, c'est-à-dire entre 6 et 8 bonnes réponses.

Et environ 95% des candidats auront entre 4,42 et 10,18 bonnes réponses, c'est-à-dire entre 5 et 10 bonnes réponses. (0,5)

Bonus : a. Achille et la tortue & Achille et la flèche (+0,125) (+0,125)

b. C'est un infini qui existe vraiment. (+0,125)
Il s'oppose à l'infini potentiel. (+0,125)

c. Augustin Cauchy (+0,125)

d. Cantor. (+0,125)
Un nombre transcendant est un nombre qui n'est pas solution d'une équation polynomiale. (+0,25)

e. S n'existe pas : en la calculant de différentes manières, on peut obtenir 0 ou un demi par exemple. (+0,5)