

MATHEMATIQUES N°7

Remarque : ultra classique ; attention au soin et à la rédaction...

Exercice 1 : (3,5 points) Toute ressemblance avec des faits et des personnages existants ou ayant existé serait purement fortuite et ne pourrait être que le fruit d'une pure coïncidence.

Un WE, pendant une fête durant laquelle toute la famille était réunie, le jeune Matt décide d'épater tout le monde en parlant de la fonction sinus.

1. La fonction sinus est-elle paire ou impaire ? Donne la bonne réponse, explique ce que cela signifie et ce que cela implique graphiquement.
2. a. Un de ses oncles demande alors à Matt : « Saurais-tu nous expliquer ce qu'est une fonction 2π -périodique ? ». Et Matt répond parfaitement : il explique ce que cela signifie et ce que cela implique graphiquement. Peux-tu retranscrire ce qu'à répondu Matt à son oncle ?
b. Démontrer que la fonction $f(x) = \cos(0,5x)$ est 4π -périodique.

Exercice 2 : (8,5 points)

1° TOM est un triangle tel que $TO = 5$, $OM = 8$ et $\widehat{TOM} = \frac{\pi}{6}$. Calculer $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OT}$.

2° JIM est un triangle tel que $\widehat{JIM} = \frac{2\pi}{3}$, $IJ = 4$ et $MI = 9$. Calculer $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MI}$

3° MAX est un triangle tel que $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$, $AM = 7$, $AX = 9$. Déterminer une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{MAX}$.

4° SAM est un triangle tel que $AM = 7$, $AS = 3$ et $MS = 9$. Calculer $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SM}$.

Exercice 3 : (5 points)

1° Soit BEN un triangle tel que $BN = 10$, $BE = 5$ et $EN = 7$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BEN}$ au centième de degré.

2° Soit LUC un triangle tel que $LU = 5$, $LC = 7$ et $\widehat{ULC} = \frac{\pi}{6}$. Calculer UC à 10^{-1} près.

Exercice 4 : (3 points)

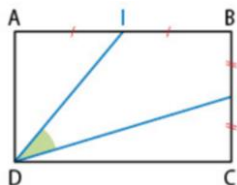
Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 3$.

On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].

1. Vérifier que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ et que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CJ} = 4,5$.

On admettra pour la suite que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$ et $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AI} = 12,5$.

2. Sachant que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$ et que $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}$, calculer $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ}$.



Bonus : a. Le produit vectoriel est « antisymétrique » : qu'est-ce que cela signifie ?

b. Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée directe, que vaut $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$?

c. Que vaut $\vec{u} \wedge \vec{u}$?

d. Que vaut $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$? e. Calculer $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

MATHEMATIQUES N°7

Remarque : ultra classique ; attention au soin et à la rédaction...

Exercice 1 : (3,5 points) Toute ressemblance avec des faits et des personnages existants ou ayant existé serait purement fortuite et ne pourrait être que le fruit d'une pure coïncidence.

Un WE, pendant une fête durant laquelle toute la famille était réunie, le jeune Matt décide d'épater tout le monde en parlant de la fonction sinus.

1. La fonction sinus est-elle paire ou impaire ? Donne la bonne réponse, explique ce que cela signifie et ce que cela implique graphiquement.
2. a. Un de ses oncles demande alors à Matt : « Saurais-tu nous expliquer ce qu'est une fonction 2π -périodique ? ». Et Matt répond parfaitement : il explique ce que cela signifie et ce que cela implique graphiquement. Peux-tu retranscrire ce qu'à répondu Matt à son oncle ?
b. Démontrer que la fonction $f(x) = \cos(0,5x)$ est 4π -périodique.

Exercice 2 : (8,5 points)

1° TOM est un triangle tel que $TO = 5$, $OM = 8$ et $\widehat{TOM} = \frac{\pi}{6}$. Calculer $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OT}$.

2° JIM est un triangle tel que $\widehat{JIM} = \frac{2\pi}{3}$, $IJ = 4$ et $MI = 9$. Calculer $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MI}$

3° MAX est un triangle tel que $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$, $AM = 7$, $AX = 9$. Déterminer une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{MAX}$.

4° SAM est un triangle tel que $AM = 7$, $AS = 3$ et $MS = 9$. Calculer $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SM}$.

Exercice 3 : (5 points)

1° Soit BEN un triangle tel que $BN = 10$, $BE = 5$ et $EN = 7$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BEN}$ au centième de degré.

2° Soit LUC un triangle tel que $LU = 5$, $LC = 7$ et $\widehat{ULC} = \frac{\pi}{6}$. Calculer UC à 10^{-1} près.

Exercice 4 : (3 points)

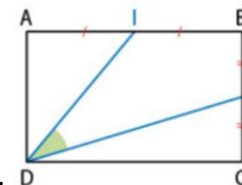
Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 3$.

On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].

1. Vérifier que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ et que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CJ} = 4,5$.

On admettra pour la suite que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$ et $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AI} = 12,5$.

2. Sachant que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}$ et que $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}$, calculer $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ}$.



Bonus : a. Le produit vectoriel est « antisymétrique » : qu'est-ce que cela signifie ?

b. Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée directe, que vaut $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$?

c. Que vaut $\vec{u} \wedge \vec{u}$?

d. Que vaut $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$? e. Calculer $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

MATHEMATIQUES N°7

Exercice 1 : (3,5 points)

1° La fonction sinus impaire.

Cela signifie que $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2. a. Matt a expliqué que cela voulait dire que $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

Graphiquement, la courbe représentative se répète par copier-coller tous les 2π .

$$b. f(x + 4\pi) = \cos(0,5(x + 4\pi))$$

$$= \cos(0,5x + 2\pi)$$

$$= \cos(0,5x)$$

$$= f(x)$$

Donc f est bien 4π -périodique.

Exercice 2 : (8,5 points)

$$1^\circ \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OT} = OM \times OT \times \cos(\widehat{TOM})$$

$$= 5 \times 8 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 20\sqrt{3}$$

$$2^\circ \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MI} = -\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IM}$$

$$= -IJ \times IM \times \cos(\widehat{JIM})$$

$$= -4 \times 9 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -36 \times \frac{-1}{2}$$

$$= 18$$

$$3^\circ \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AM} = AX \times AM \times \cos(\widehat{MAX})$$

$$-6 = 9 \times 7 \times \cos(\widehat{MAX})$$

$$\frac{-6}{63} = \cos(\widehat{MAX})$$

$$\widehat{MAX} = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{21}\right)$$

$$\approx 95,5^\circ$$

$$4. \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SM} = -\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SM}$$

$$= -\frac{1}{2}(AM^2 - AS^2 - SM^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(7^2 - 3^2 - 9^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(49 - 9 - 81)$$

$$= -\frac{1}{2} \times (-41) = 20,5$$

Exercice 3 : (5 points)

1° D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$BN^2 = BE^2 + EN^2 - 2 \times BE \times EN \times \cos(\widehat{BEN})$$

$$10^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos(\widehat{BEN})$$

$$100 = 25 + 49 - 70 \cos(\widehat{BEN})$$

$$100 - 25 - 49 = -70 \cos(\widehat{BEN})$$

$$\frac{26}{-70} = \cos(\widehat{BEN})$$

$$\widehat{BEN} = \cos^{-1}\left(\frac{-26}{70}\right) \approx 111,80^\circ$$

2° D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$UC^2 = LU^2 + LC^2 - 2 \times LU \times LC \times \cos(\widehat{CLU})$$

$$= 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= 25 + 49 - 70 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 74 - 35\sqrt{3}$$

$$UC = \sqrt{74 - 35\sqrt{3}} \approx 3,7$$

Exercice 4 : (3 points)

$$1. \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = DA \times DC \times \cos(\widehat{DAC})$$

$$\text{Or, } (\widehat{DAC}) = \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos(\widehat{DAC}) = 0$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0.$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CJ} = DA \times CJ \times \cos(\widehat{DAC})$$

$$= 3 \times 1,5 \times \cos(0)$$

$$= 4,5 \times 1 = 4,5$$

$$2. \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI}) \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ})$$

$$= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ}$$

$$= 0 + 4,5 + 12,5 + 0$$

$$= 17$$

Bonus : a. $\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$

$$b. \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$c. \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \text{ (et pas 0)}$$

$$d. \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times \sin(\widehat{a,b})$$

$$e. \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times (-6) - 3 \times 5 \\ 3 \times (-4) - 1 \times (-6) \\ 1 \times 5 - (-2) \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$