

MATHEMATIQUES N°6.2

Remarque : la qualité de la rédaction et du soin en général seront pris en compte...

Exercice 1 : (5 points)

1. Sachant que $\cos x = -0,7$ et que $x \in [\pi ; 2\pi[$, déterminer la valeur de $\sin x$.
2. Déterminer $\cos\left(\frac{343\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{343\pi}{6}\right)$

Exercice 2 : (11,5 points)

Ethan souhaite réaménager l'espace paysager de sa parcelle boisée comptant 10 000 arbres en 2018. Pour cela, il se fixe un plan progressif qui consiste à couper chaque année 20 % des arbres et à planter 600 nouveaux pieds d'arbre.

On modélise l'évolution du nombre d'arbres de cette parcelle par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n , u_n est le nombre d'arbres de la parcelle pour l'année 2018 + n . Ainsi, on a $u_0 = 10\,000$.

1. a. Calculer u_1 et u_2 .
b. Justifier, pour tout entier naturel n , l'égalité $u_{n+1} = 0,8u_n + 600$.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 3\,000$ pour tout entier naturel n .
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 7\,000 \times 0,8^n + 3\,000$.
 - d. Quel est le sens de variation de (v_n) ? Et de (u_n) ?
 - e. Si le réaménagement de cette parcelle se poursuit selon ce même modèle, combien d'arbres la parcelle comptera-t-elle en 2030 ?
 - f. Que peut-on conjecturer à long terme concernant le nombre d'arbres de cette parcelle ?
3. Ethan souhaite conserver au moins 4 000 arbres sur sa parcelle. Il cherche à déterminer l'année où il devra cesser son plan de réaménagement progressif. Déterminer l'année au cours de laquelle il devra cesser son plan de réaménagement.

- Bonus :** a. Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est une fonction affine, quel type de suite obtient-on ?
b. De quel mathématicien célèbre trouve-t-on le portrait en début d'article ?
c. Qu'est-ce qu'une suite récurrente d'ordre 2 ?
d. Quelle est le nom des suites définies par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$?
e. Quelle est l'équation caractéristique de la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$?
f. Quel est le terme suivant de cette suite : 1, 11, 21, 1211, 111221 ?
g. « m est la première, la dixième, la vingt-deuxième, ... lettre de cette phrase. ». Donner le terme suivant de la suite : 1, 10, 22, ...

MATHEMATIQUES N°6.2

Remarque : la qualité de la rédaction et du soin en général seront pris en compte...

Exercice 1 : (5 points)

1. Sachant que $\cos x = -0,7$ et que $x \in [\pi ; 2\pi[$, déterminer la valeur de $\sin x$.
2. Déterminer $\cos\left(\frac{343\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{343\pi}{6}\right)$

Exercice 2 : (11,5 points)

Ethan souhaite réaménager l'espace paysager de sa parcelle boisée comptant 10 000 arbres en 2018. Pour cela, il se fixe un plan progressif qui consiste à couper chaque année 20 % des arbres et à planter 600 nouveaux pieds d'arbre.

On modélise l'évolution du nombre d'arbres de cette parcelle par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n , u_n est le nombre d'arbres de la parcelle pour l'année 2018 + n . Ainsi, on a $u_0 = 10\,000$.

1. a. Calculer u_1 et u_2 .
b. Justifier, pour tout entier naturel n , l'égalité $u_{n+1} = 0,8u_n + 600$.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 3\,000$ pour tout entier naturel n .
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 7\,000 \times 0,8^n + 3\,000$.
 - d. Quel est le sens de variation de (v_n) ? Et de (u_n) ?
 - e. Si le réaménagement de cette parcelle se poursuit selon ce même modèle, combien d'arbres la parcelle comptera-t-elle en 2030 ?
 - f. Que peut-on conjecturer à long terme concernant le nombre d'arbres de cette parcelle ?
3. Ethan souhaite conserver au moins 4 000 arbres sur sa parcelle. Il cherche à déterminer l'année où il devra cesser son plan de réaménagement progressif. Déterminer l'année au cours de laquelle il devra cesser son plan de réaménagement.

- Bonus :** a. Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est une fonction affine, quel type de suite obtient-on ?
b. De quel mathématicien célèbre trouve-t-on le portrait en début d'article ?
c. Qu'est-ce qu'une suite récurrente d'ordre 2 ?
d. Quelle est le nom des suites définies par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$?
e. Quelle est l'équation caractéristique de la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$?
f. Quel est le terme suivant de cette suite : 1, 11, 21, 1211, 111221 ?
g. « m est la première, la dixième, la vingt-deuxième, ... lettre de cette phrase. ». Donner le terme suivant de la suite : 1, 10, 22, ...

MATHEMATIQUES N°6.2

Exercice 1 : (5 points)

$$\begin{aligned}
 1) \text{ On a } (\cos x)^2 + (\sin x)^2 &= 1 \\
 (-0,7)^2 + (\sin x)^2 &= 1 \\
 0,49 + (\sin x)^2 &= 1 \\
 (\sin x)^2 &= 1 - 0,49 \\
 (\sin x)^2 &= 0,51
 \end{aligned}$$

Or, $x \in [\pi ; 2\pi[$ donc $\sin x \leq 0$.

$$\text{D'où } \sin x = -\sqrt{0,51}. \quad (2,5)$$

$$2. 343 = 29 \times 12 - 5$$

$$\text{D'où } \frac{343\pi}{6} = 29 \times 2\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{Ainsi, on a } \begin{cases} \cos\left(\frac{343\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{343\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2} \end{cases} \quad (2,5)$$

Exercice 1 : (11,5 points)

$$\begin{aligned}
 1. \text{ a. } u_1 &= 10\,000 \times 0,8 + 600 \\
 &= 8\,000 + 600 \\
 &= 8\,600
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= 8\,600 \times 0,8 + 600 \\
 &= 6\,880 + 600 \\
 &= 7\,480 \quad (1)
 \end{aligned}$$

b. D'une année à l'autre, il y a une baisse de 20% : il faut donc multiplier par 0,8. Et puisque 600 arbres sont plantés, il faut ensuite ajouter 600.

$$\text{D'où } u_{n+1} = 0,8u_n + 600 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ a. } v_{n+1} &= u_{n+1} - 3\,000 \\
 &= 0,8u_n + 600 - 3\,000 \\
 &= 0,8(v_n + 3\,000) - 2\,400 \\
 &= 0,8v_n + 2\,400 - 2\,400 \\
 &= 0,8v_n
 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 0,8.

$$\begin{aligned}
 v_0 &= u_0 - 3\,000 \\
 &= 10\,000 - 3\,000 \\
 &= 7\,000 \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } v_n &= v_0 \times 0,8^n \\
 &= 7\,000 \times 0,8^n \quad (0,75)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } u_n &= v_n + 3\,000 \\
 &= 7\,000 \times 0,8^n + 3\,000 \quad (0,75)
 \end{aligned}$$

d. (v_n) est décroissante car sa raison est 0,8 et son 1^{er} terme est positif. Et (u_n) est donc également décroissante car $u_n = v_n + 3\,000$. $(1,5)$

$$\begin{aligned}
 \text{e. } u_{12} &= 7\,000 \times 0,8^{12} + 3\,000 \\
 &\approx 3\,481
 \end{aligned}$$

Si le réaménagement de cette parcelle se poursuit selon ce même modèle, la parcelle comptera environ 3 481 arbres en 2030. (1)

f. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3\,000$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ puisque $0 < 0,8 < 1$. A long terme, le nombre d'arbre devrait donc approcher de 3 000. (1)

3. A l'aide de la calculatrice, pour $n = 8$ (début 2026) on obtient $u_8 \approx 4\,174$ et pour $n = 9$ (début 2027) on obtient $u_9 \approx 3\,940$ arbres.

C'est donc au cours de l'année 2026 que sa parcelle comptera moins de 4 000 arbres. $(1,5)$

Bonus : a. Arithmético-géométrique.

b. Joseph-Louis Lagrange.

c. $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$. Autrement dit, pour calculer un terme, il faut connaître les deux précédents.

d. Suite de Fibonacci (ou de Lucas). $(+0,25)$

$$\text{e. } r^2 - r - 1 = 0 \text{ ou } r^2 = r + 1$$

$$\text{f. } 312211$$

$$\text{g. } 37$$

0180875290

$\Rightarrow$ Penser à ajouter la note obtenue à la première partie du contrôle, sur 3,5 pts (à raison de 0,25 pts par bonne réponse)