

MATHÉMATIQUES N°6

Remarque : celui qui pourra dire que ce contrôle est plus difficile que celui de l'année dernière sera un menteur et me devra un paquet de bonbons !

Exercice 1 : (3 points)

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(-1 ; 2 ; 0)$, $B(1 ; 2 ; 4)$ et $C(-1 ; 1 ; 1)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au dixième de degré.

Exercice 2 : (11 points)

Soit g la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par $g(x) = \frac{10x}{x^2 + 1}$ et soit $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Partie A

1. Vérifier que $g'(x) = \frac{10(1-x)(1+x)}{(x^2 + 1)^2}$

2. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $[-3 ; 3]$.

3. Déterminer le nombre de points d'intersection entre la courbe $\mathcal{C}_g$ et la droite (d) d'équation $y = 3$.

4. **a.** Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0.

b. Déterminer le signe de $g(x) - 10x$.

c. En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}_g$ par rapport à la droite $\mathcal{T}$.

Partie B

1. Vérifier que $g''(x) = \frac{20x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$.

2. Établir le signe de $g''(x)$ sur $[-3 ; 3]$.

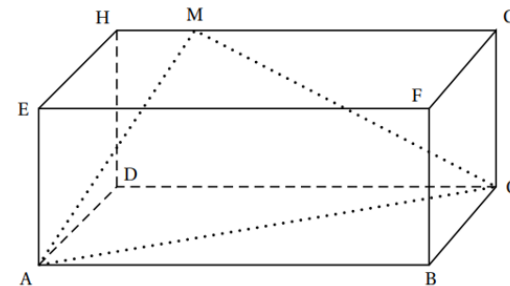
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_g$.

Exercice 3 : (3,5 points)

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallépi...un parallépip... un parallépi... Rhaaaa, ça m'énervé !!

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est pavé droit. On sait que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel on a $B(5 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 3 ; 0)$ et $E(0 ; 0 ; 2)$.



1. Donner les coordonnées de G et H.

2. Soit M un point de $[GH]$ tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ où $k \in [0 ; 1]$.

a. Justifier que les coordonnées de M sont $(5k ; 3 ; 2)$.

b. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est rectangle en M.

Exercice 4 : (2,5 points)

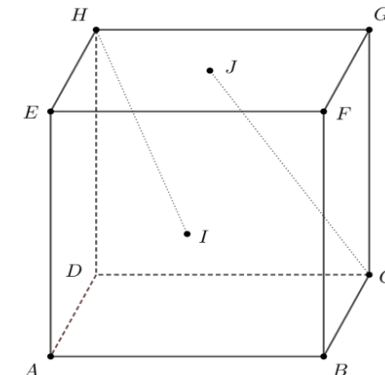
ABCDEFGH est un cube de côté a .

I est le centre de la face ABFE.

J est le centre de la face EFGH.

1. Calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HB}$

2. Calculer $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{CJ}$



Bonus : **a.** Le produit vectoriel est « antisymétrique » : qu'est-ce que cela signifie ?

b. Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée directe, que vaut $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3$?

c. Que vaut $\vec{u} \wedge \vec{u}$?

d. Que vaut $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$?

e. Calculer $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

MATHEMATIQUES N°6

Exercice 1 : (3 points)

1. a. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 2 - 2 \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 - (-1) \\ 1 - 2 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Or, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires car $k \times \vec{AB} \begin{pmatrix} 2k \\ 0 \\ 4k \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

A, B et C ne sont donc pas alignés. (1)

b. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) + 4 \times 1 = 4$ (0,5)

c. $AB^2 = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 20$ et $AC^2 = 0^2 + (-1)^2 + 1^2 = 2$

D'où $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$4 = \sqrt{20} \times \sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{4}{\sqrt{20} \times \sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{40}}$

$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{40}}\right) \approx 50,8^\circ$ (1,5)

Exercice 2 : (11 points)

1. $g'(x) = \frac{10(x^2 + 1) - 2x \times 10x}{(x^2 + 1)^2}$
 $= \frac{10(x^2 + 1 - 2x^2)}{(x^2 + 1)^2}$
 $= \frac{10(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$
 $= \frac{10(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$ (1)

2.

x	-3	-1	1	3
1 - x	+	+	0	-
1 + x	-	0	+	+
g'(x)	-	0	+	0
g(x)	-3	-5	5	3

(1)

3. Sur [-3 ; -1], le maximum de g est -3 donc g(x) = 3 n'admet pas de solution (0,5)

Sur [-1 ; 1], la fonction g est continue et strictement croissante.

$g(-1) = -5 < 3$ et $g(1) = 5 > 3$

D'après le théorème de la bijection, l'équation g(x) = 3 admet donc une unique solution sur [-1 ; 1]. (1,5)

Enfin, sur [1 ; 3], g(3) = 3 donc 3 est l'unique solution (0,25)

On a deux solutions sur [-3 ; 3], et donc deux points d'intersection entre C_g et (d). (0,25)

4. a. L'équation de T est y = g'(0)(x - 0) + g(0)

Or, $g'(0) = \frac{10(1 - 0)(1 + 0)}{(0^2 + 1)^2} = \frac{10 \times 1 \times 1}{(1)^2} = 10$ et $g(0) = 0$

D'où y = 10x (0,75)

b. $g(x) - 10x = \frac{10x}{x^2 + 1} - 10x$
 $= \frac{10x - 10x(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$
 $= \frac{10x - 10x^3 - 10x}{x^2 + 1}$
 $= \frac{-10x^3}{x^2 + 1}$

g(x) - 10x est du signe de -10x³, c'est-à-dire du signe de -10x car x² + 1 > 0.

x	-3	0	3
g(x) - 10x	+	0	-

(1,5)

c. C_g au-dessus de T lorsque x ∈ [-3 ; 0] et en-dessous lorsque x ∈ [0 ; 3]. (0,5)

Partie B

1. $g''(x) = \frac{-20x(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) \times 2x \times 10(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^4}$
 $= \frac{20x(x^2 + 1)(-(x^2 + 1) - 2(1 - x^2))}{(x^2 + 1)^4}$
 $= \frac{20x(-x^2 - 1 - 2 + 2x^2)}{(x^2 + 1)^3}$
 $= \frac{20x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$ (1)

2. g''(x) est du signe de 20x(x² - 3) car (x² + 1)³ > 0.

20x = 0 ou x² - 3 = 0

x = 0 ou x² = 3

x = 0 ou x = √3 ou x = -√3

x	-3	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	3
$20x$	-	-	0	+	+
$x^2 - 3$	+	0	-	-	+
$g''(x)$	-	0	+	0	+

(1,5)

3. On a donc trois points d'inflexion en $-\sqrt{3}$, 0 et $\sqrt{3}$.

$$g(\sqrt{3}) = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2 + 1} = \frac{10\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad g(-\sqrt{3}) = \frac{10 \times (-\sqrt{3})}{(-\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{-5\sqrt{3}}{2}$$

Leurs coordonnées sont donc $(-\sqrt{3}; \frac{-5\sqrt{3}}{2})$, (0; 0) et $(\sqrt{3}; \frac{5\sqrt{3}}{2})$. (1,25)

Exercice 3 : (3,5 points)

1. On a $G(5; 3; 2)$ et $H(0; 3; 2)$. (0,5)

$$2. a. \overrightarrow{HM} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} \overrightarrow{HM} \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HG} \begin{pmatrix} 5-0 \\ 3-3 \\ 2-2 \end{pmatrix} \overrightarrow{HG} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On doit donc avoir } \begin{cases} x = 5k \\ y-3=0 \\ z-2=0 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} x=5k \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$

Donc $M(5k; 3; 2)$. (1)

b. AMC est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.

$$\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 0-5k \\ 0-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} \overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -5k \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MC} \begin{pmatrix} 5-5k \\ 3-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} \overrightarrow{MC} \begin{pmatrix} 5-5k \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = -5k(5-5k) - 3 \times 0 - 2 \times (-2)$$

$$\text{Donc } 0 = -25k + 25k^2 - 0 + 4$$

$$0 = 25k^2 - 25k + 4$$

$$\Delta = (-25)^2 - 4 \times 25 \times 4$$

$$= 625 - 400$$

$$= 225$$

$$\text{D'où : } k_1 = \frac{25 - \sqrt{225}}{2 \times 25} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{25 + \sqrt{225}}{2 \times 25}$$

$$= \frac{25 - 15}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad = \frac{25 + 15}{25} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$$

(2)

Exercice 4 : (2,5 points)

1. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EA}$ par projection orthogonale

$$= -a^2 \quad (1)$$

$$2. \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{CJ} = (\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FI}) \cdot (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GJ})$$

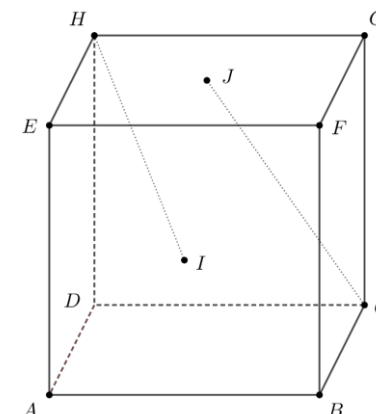
$$= \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{GJ}$$

$$= 0 + 0 + \overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2} \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{GJ}$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2} \overrightarrow{FE} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{FE}$$

$$= -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} a^2$$

$$= -\frac{1}{4} a^2 \quad (1,5)$$



Bonus : a. $\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}$

$$b. \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

(+0,25)

$$c. \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \text{ (et pas 0)}$$

$$d. \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

$$e. \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times (-6) - 3 \times 5 \\ 3 \times (-4) - 1 \times (-6) \\ 1 \times 5 - (-2) \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$