

MATHEMATIQUES N°5

Remarque : mon cadeau pour débiter 2024 !

Exercice 1 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 2$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution sur $[-3 ; 4]$.

Exercice 2 : (2 points) On veillera à avoir une rédaction claire et complète.

Dans le tétraèdre ABCD, on place les points I et J tels que :

$$\vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{AJ} = \frac{3}{4}\vec{AB}$$

1. Exprimer $\vec{IJ}$ en fonction de $\vec{CB}$.
2. Que peut-on en déduire pour la droite (IJ) et le plan (BCD) ?

Exercice 3 : (3 points)

Les points A(2 ; 3 ; 4), B(3 ; 0 ; 4), C(5 ; 6 ; 7) et D(8 ; 7 ; 13) sont-ils coplanaires ?

Exercice 4 : (7,5 points)

Soit g la fonction définie par $g(x) = x\sqrt{x(2-x)}$

- 1° Démontrer que $D_g = [0 ; 2]$.
- 2° a. Sur quel intervalle la fonction g est-elle dérivable ? (on peut répondre directement)
b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$.
c. Que peut-on en déduire ?
- 3° a. Vérifier que $g'(x) = \frac{x(3-2x)}{\sqrt{x(2-x)}}$
b. Dresser le tableau de variations de g .
- 4° Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.

Exercice 5 : (3,5 points)

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par :

$$f(x) = \left(\frac{x-4}{x+3}\right)^4$$

- Bonus** :
- a. Sous quel nom le principe du TVI était-il connu en 1545 ?
 - b. Qui a formalisé le fait qu'on puisse tracer une fonction continue sans lever le crayon ?
 - c. Que signifie que la fonction f est « *primitivable* » ?
 - d. Donner le nom d'un mathématicien cité dans l'article dont le nom commence par la lettre B, et un autre dont le nom commence par la lettre W ?

MATHEMATIQUES N°5

Remarque : mon cadeau pour débiter 2024 !

Exercice 1 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 2$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution sur $[-3 ; 4]$.

Exercice 2 : (2 points) On veillera à avoir une rédaction claire et complète.

Dans le tétraèdre ABCD, on place les points I et J tels que :

$$\vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{AJ} = \frac{3}{4}\vec{AB}$$

1. Exprimer $\vec{IJ}$ en fonction de $\vec{CB}$.
2. Que peut-on en déduire pour la droite (IJ) et le plan (BCD) ?

Exercice 3 : (3 points)

Les points A(2 ; 3 ; 4), B(3 ; 0 ; 4), C(5 ; 6 ; 7) et D(8 ; 7 ; 13) sont-ils coplanaires ?

Exercice 4 : (7,5 points)

Soit g la fonction définie par $g(x) = x\sqrt{x(2-x)}$

- 1° Démontrer que $D_g = [0 ; 2]$.
- 2° a. Sur quel intervalle la fonction g est-elle dérivable ? (on peut répondre directement)
b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$.
c. Que peut-on en déduire ?
- 3° a. Vérifier que $g'(x) = \frac{x(3-2x)}{\sqrt{x(2-x)}}$
b. Dresser le tableau de variations de g .
- 4° Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1.

Exercice 5 : (3,5 points)

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par :

$$f(x) = \left(\frac{x-4}{x+3}\right)^4$$

- Bonus** :
- a. Sous quel nom le principe du TVI était-il connu en 1545 ?
 - b. Qui a formalisé le fait qu'on puisse tracer une fonction continue sans lever le crayon ?
 - c. Que signifie que la fonction f est « *primitivable* » ?
 - d. Donner le nom d'un mathématicien cité dans l'article dont le nom commence par la lettre B, et un autre dont le nom commence par la lettre W ?

MATHEMATIQUES N°5

Exercice 1 : (4 points)

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 12$$

$$= 6x^2 - 6x - 12$$

$$= 6(x^2 - x - 2)$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) \quad x_1 = \frac{1-3}{2} \quad x_2 = \frac{1+3}{2}$$

$$= 1 + 8 \quad = \frac{-2}{2} = -1 \quad = \frac{4}{2} = 2$$

$$= 9$$

x	-3	-1	2	4
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	-47	5	-22	30

(1,5)

Sur $[-3 ; 2]$ le maximum de la fonction f vaut 5 donc $f(x) = 10$ n'admet pas de solution. (0,5)

Sur $[2 ; 4]$, la fonction f est continue et strictement croissante.

De plus, $f(2) = -22 < 10$ et $f(4) = 30 > 10$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 10$ admet donc une unique solution sur $[2 ; 4]$. (2)

Au final, l'équation $f(x) = 10$ admet donc une unique solution sur $[-3 ; 4]$.

Exercice 2 : (2 points)

1. $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ}$

$$= \frac{-3}{4}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AB}$$

$$= \frac{3}{4}\vec{CA} + \frac{3}{4}\vec{AB}$$

$$= \frac{3}{4}\vec{CB} \quad (1)$$

2. On peut en déduire que la droite (IJ) et la droite (BC) sont parallèles.

Et par conséquent, la droite (IJ) et le plan (BCD) sont parallèles. (1)

Exercice 3 : (3 points)

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-3 \\ 4-4 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 6-3 \\ 7-4 \end{pmatrix} \quad \vec{AD} \begin{pmatrix} 8-2 \\ 7-3 \\ 13-4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{AD} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Supposons que } \vec{AB} = x\vec{AC} + y\vec{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3x + 6y \\ -3 = 3x + 4y \\ 0 = 3x + 9y \end{cases}$$

$$L_1 - L_2 : 4 = 2y$$

$$\frac{4}{2} = y \text{ c'est-à-dire } y = 2$$

$$L_1 \text{ donne alors } 1 = 3x + 6 \times 2$$

$$1 - 12 = 3x$$

$$\frac{-11}{3} = x$$

On remplace dans L_3 :

$$3x + 9y = 3 \times \frac{-11}{3} + 9 \times 2$$

$$= -11 + 18$$

$$= 7 \neq 0$$

(3)

Le système n'a pas de solution donc A, B, C et B ne sont pas coplanaires.

Remarque : on aurait pu remarquer que $L_3 : -9y = 3x$ puis procéder par substitution dans L_1 ou L_2 , etc.

Exercice 4 : (7,5 points)

1° Il faut que $x(2-x) \geq 0$

C'est un polynôme de degré 2 dont les racines sont 0 et 2.

Il faut donc que $x \in [0 ; 2]$ (1)

2° a. g est dérivable sur $]0 ; 2[$. (0,5)

$$b. \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x} = \sqrt{x(2-x)}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \sqrt{0(2-0)} = 0 \quad (0,5)$$

c. On peut donc poser $g'(0) = 0$ (0,5)

$$\begin{aligned}
 3^\circ \text{ a. } g'(x) &= 1 \times \sqrt{x(2-x)} + x \frac{1}{2\sqrt{x(2-x)}} \times (-2x+2) \\
 &= \frac{2x(2-x) + x(-2x+2)}{2\sqrt{x(2-x)}} \\
 &= \frac{4x - 2x^2 - 2x^2 + 2x}{2\sqrt{x(2-x)}} \\
 &= \frac{6x - 4x^2}{2\sqrt{x(2-x)}} \\
 &= \frac{2x(3-2x)}{2\sqrt{x(2-x)}} = \frac{x(3-2x)}{\sqrt{x(2-x)}} \quad (2,5)
 \end{aligned}$$

b. $g'(x)$ a le même signe que $3-2x$ car x est positif et $\sqrt{x(2-x)}$ aussi.

x	0	1,5	2	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	0			0

1,5

$$4^\circ g'(1) = \frac{1(3-2 \times 1)}{\sqrt{1(2-1)}} = \frac{1 \times 1}{\sqrt{1 \times 1}} = 1$$

$$g(1) = 1\sqrt{1(2-1)} = 1\sqrt{1 \times 1} = 1$$

$$\text{D'où } y = 1(x-1) + 1$$

$$= x - 1 + 1$$

$$= x$$

(1)

Exercice 5 : (3,5 points)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4 \left(\frac{x-4}{x+3} \right)^3 \times \frac{1(x+3) - 1(x-4)}{(x+3)^2} \\
 &= 4 \left(\frac{x-4}{x+3} \right)^3 \times \frac{x+3-x+4}{(x+3)^2} \\
 &= 4 \left(\frac{x-4}{x+3} \right)^2 \left(\frac{x-4}{x+3} \right) \frac{7}{(x+3)^2} \quad (1,5)
 \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe de $\frac{x-4}{x+3}$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x-4$	-	-	+	
$x+3$	-	+	+	
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$			0	

(2)

Bonus :

a. « règle d'or » (+0,25)

b. Cauchy (+0,25)

c. Il existe une fonction F telle que $f = F'$ (+0,25)

d. Bolzano et Weierstrass (+0,25) (+0,25)

