

MATHEMATIQUES N°5

Remarque : On veillera à rédiger les calculs, faire des phrases réponses et avoir une copie propre.

Exercice 1 : (2,5 points)

Déterminer la mesure principale des angles suivants :

$$A = \frac{358\pi}{7} \text{ rad} \qquad B = \frac{-263\pi}{6} \text{ rad}$$

Exercice 2 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[-2 ; 4]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$. On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan.

- Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2.
- On définit la fonction g par $g(x) = f(x) - (-9x + 7)$.
 - Etudier les variations de g sur $[-2 ; 4]$ et dresser son tableau de variations dans lequel on indiquera les extremums.
 - Calculer $g(-1)$ et en déduire le tableau de signes de g sur $[-2 ; 4]$.
 - Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ sur $[-2 ; 4]$.
- Donner un encadrement de $g(x)$ sur $[0 ; 4]$ puis sur $[-2 ; 4]$.
- Montrer que pour tout $x \in [-1 ; 4]$, on a $x^3 \geq 3x^2 - 4$.

Exercice 3 : (3,5 points)

Pour les fêtes de fin d'année, une entreprise produit des objets décoratifs. Le bénéfice est modélisé par la fonction B définie sur $[10 ; 60]$ par $B(q) = q^3 - 105q^2 + 3\,000q + 8\,500$ où q est le nombre d'objets décoratifs fabriqués.

- Dresser le tableau de variations de la fonction B .
- Déterminer la production à réaliser pour obtenir un bénéfice maximal, et déterminer ce bénéfice maximal.

Exercice 4 : (7 points)

Un agriculteur souhaite faire creuser un puits pour arroser ses cultures.

Le creusement du 1^{er} mètre coûte 500 €, puis le creusement de chaque mètre supplémentaire coûte 150 € de plus que le précédent.

1° On note u_n le prix que coûte le creusement du $n^{\text{ème}}$ mètre.

- Quelle est la nature de la suite u_n ?
- Vérifier que $u_n = 350 + 150n$

2° a. Combien coûterait le creusement du 13^{ème} mètre ?

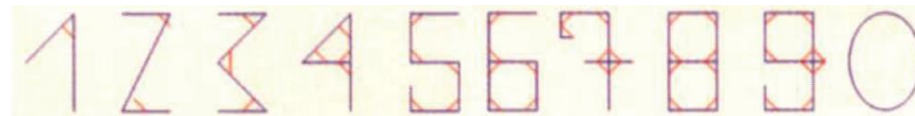
b. Combien coûterait au total un puits de 13 mètres de profond ?

3° Notre agriculteur dispose d'un budget de 40 000 € : il souhaite savoir quelle profondeur son puits pourrait atteindre avec cette somme.

- En expliquant la démarche, montrer que cela revient à résoudre l'inéquation $3n^2 + 17n - 1\,600 \leq 0$
- Répondre alors à la question que se pose l'agriculteur.

Bonus : a. Il existe trois unités d'angle : les degrés, les ... et les radians.

- De quelle civilisation a-t-on hérité des degrés ?
- Dans quel autre « domaine » retrouve-t-on un décompte en base 60, comme celui utilisé pour les angles ?
- Combien mesurent les angles d'un pentagone régulier ?
- Pour quel type d'objet / de notion mathématique a-t-on introduit les radians ?



MATHEMATIQUES N°5

Exercice 1 : (2,5 points)

$$358 = 26 \times 14 - 6$$

$$\frac{358\pi}{7} = 26 \times \frac{14\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} \text{ c'est-à-dire } \frac{358\pi}{7} = 26 \times 2\pi - \frac{6\pi}{7}$$

La mesure principale de A est $\frac{-6\pi}{7}$ (1,25)

$$263 = 22 \times 12 - 1$$

$$\frac{-263\pi}{6} = -22 \times \frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \text{ c'est-à-dire } \frac{-263\pi}{6} = -22 \times 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

La mesure principale de B est $\frac{\pi}{6}$ (1,25)

Exercice 2 : (7 points)

$$1. f'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x - 9$$

$$= 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(2) = 3 \times 2^2 - 6 \times 2 - 9$$

$$= 3 \times 4 - 12 - 9$$

$$= -9$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 - 9 \times 2 + 11$$

$$= 8 - 3 \times 4 - 18 + 11$$

$$= -11$$

L'équation de $\mathcal{T}$ est donc $y = -9(x - 2) - 11$
 $= -9x + 18 - 11$
 $= -9x + 7$ (1,5)

2. a. On a $g(x) = f(x) - (-9x + 7)$.

$$= x^3 - 3x^2 - 9x + 11 + 9x - 7$$

$$= x^3 - 3x^2 + 4$$

D'où $g'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x$

$$= 3x^2 - 6x$$

$$= 3x(x - 2)$$

On a donc deux racines : $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$.

x	-2	0	2	4	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	-16	4	0	20	

(2,5)

b. $g(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 4$
 $= -1 - 3 + 4$
 $= 0$

x	-2	-1	2	4	
$g(x)$	-	0	+	0	+

(1)

c. Or, g est l'écart entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.

On en déduit donc que $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{T}$ sur $[-2 ; -1]$ et au-dessus de $\mathcal{T}$ sur $[-1 ; 4]$ (0,75)

3. Sur $[0 ; 4]$, on a $0 \leq g(x) \leq 20$. (0,5)

4. Sur $[-1 ; 4]$, on a $g(x) \geq 0$.

Autrement dit, $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$

$$x^3 \geq 3x^2 - 4$$
 (0,75)

Exercice 3 : (3,5 points)

$$1. B'(q) = 3q^2 - 105 \times 2q + 3\,000$$

$$= 3q^2 - 210q + 3\,000$$

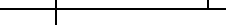
$$= 3(q^2 - 70q + 1\,000)$$

$$\Delta = (-70)^2 - 4 \times 1 \times 1\,000$$

$$= 4\,900 - 4\,000$$

$$= 900$$

D'où : $x_1 = \frac{70 - \sqrt{900}}{2 \times 1} = \frac{70 - 30}{2} = \frac{40}{2} = 20$ et $x_2 = \frac{70 + \sqrt{900}}{2 \times 1} = \frac{70 + 30}{2} = \frac{100}{2} = 50$

x	10	20	50	60	
$B'(x)$	+	0	-	0	+
$B(x)$					

(2,5)

$$2. B(20) = 20^3 - 105 \times 20^2 + 3\,000 \times 20 + 8\,500$$

$$= 34\,500$$

$$B(60) = 60^3 - 105 \times 60^2 + 3\,000 \times 60 + 8\,500$$

$$= 26\,500$$

Le bénéfice est donc maximal lorsque $q = 20$ et il est de 34 500 € (1)

Exercice 4 : (7 points)

1° a. u_n est arithmétique de raison 150 et de 1^{er} terme $u_1 = 500$ car à chaque mètre creusé le coût augmente de 150 €.

(0,5)

$$\begin{aligned} \text{b. On a alors } u_n &= u_1 + (n - 1) \times 150 \\ &= 500 + 150n - 150 \\ &= 350 + 150n \end{aligned}$$

(0,75)

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ a. } u_{13} &= 350 + 150 \times 13 \\ &= 2\,300 \end{aligned}$$

Le 13^{ème} mètre coûtera 2 300 €.

(0,75)

$$\begin{aligned} \text{b. } S &= 13 \times \frac{500 + 2\,300}{2} \\ &= 18\,200 \end{aligned}$$

Un puits de 13 m coûte donc 18 200 €.

(1,5)

3° a. Notons n le nombre de mètres. On doit résoudre :

$$\begin{aligned} n \times \frac{500 + u_n}{2} &\leq 40\,000 \\ n \times \frac{500 + 350 + 150n}{2} &\leq 40\,000 \\ n \times \frac{850 + 150n}{2} &\leq 40\,000 \\ n(850 + 150n) &\leq 40\,000 \times 2 \\ 850n + 150n^2 - 80\,000 &\leq 0 \\ 50(17n + 3n^2 - 1\,600) &\leq 0 \\ 3n^2 + 17n - 1\,600 &\leq 0 \end{aligned}$$

(2,5)

$$\begin{aligned} \text{b. } \Delta &= 17^2 - 4 \times 3 \times (-1\,600) \\ &= 289 + 19\,200 \\ &= 19\,489 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } n_1 &= \frac{-17 - \sqrt{19\,489}}{2 \times 3} & \text{et} & & n_2 &= \frac{-17 + \sqrt{19\,489}}{2 \times 3} \\ &\approx -26,1 & & & &\approx 20,4 \end{aligned}$$

Entre ces racines, le trinôme est négatif.

Son puits mesurera donc au maximum 20 mètres.

(1)

Bonus : a. Grades.

b. Les babyloniens.

c. Le temps (heures / minutes / secondes)

(+0,25)

d. 108°

e. La dérivation des formules trigonométriques