

MATHEMATIQUES N°4

Remarques : Présentation et rédaction comptent dans la notation...

Exercice 0 : (2 points) *Extrait d'un sujet de BAC...*

Les résultats seront donnés en valeur exacte lorsque c'est possible, puis arrondis à 10^{-3} près.

Après de nombreuses séances d'entraînement, on estime qu'un athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par cet athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies,

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
2. Déterminer la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
3. Calculer $p(X \geq 9)$.

Exercice 1 : (5,5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-2x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
2. a. Démontrer que, pour tout $x > 1$, on a $1 < x < x^2 < x^3$.
b. En déduire que, pour tout $x > 1$, on a $0 < f(x) < 4x^3e^{-2x+1}$
c. Vérifier que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $4x^3e^{-2x+1} = \frac{e}{2}(2x)^3e^{-2x}$
d. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3e^{-2x+1} = 0$.
e. Déduire des questions précédentes la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

Exercice 2 : (3 points)

C'est un choc sans précédent : des élèves de Spécialité Terminale ont fini par se rendre compte que leur prof de maths n'était pas infallible ! 🤖 Ils ont pu établir qu'il lui arrive de se tromper, avec une probabilité de 0,025.

Déterminer le nombre de cours successifs auxquels un élève doit assister pour que la probabilité qu'il assiste à au moins une erreur dépasse 50%. (*personne ne dit qu'il la détectera...*)

La rédaction sera largement prise en compte dans la notation de cet exercice. On rédigera et on expliquera donc le raisonnement / les « calculs » avant de dégainner la calculatrice pour déterminer la valeur de n .

Exercice 3 : (2,5 points)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7xe^{5-2,4x}$

Exercice 4 : (2,5 points)

Une usine fabrique un composant électronique. On estime que 92% des composants qui sortent de la chaîne de production sont sans défauts.

Un professionnel passe une commande de 10 000 composants à cette entreprise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de composants sans défauts de cette commande.

1. Déterminer a tel que $p(X \leq a) \leq 0,025$ et b tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$.
2. Interpréter l'intervalle $[a ; b]$ ainsi obtenu.

Exercice 5 : (4,5 points)

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{5x}{3} - \frac{7}{2x} \quad f_2(x) = \frac{-5}{x^7} \quad f_3(x) = \frac{3+5x}{4-2x}$$

$$f_4(x) = (4\sqrt{x} - 1)^2 \quad f_5(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(4 - x)$$

Bonus : (+1,5 points)

1. a. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n ; p)$, que vaut $V(X)$?
b. Quel pourcentage de succès se trouve approximativement dans l'intervalle $[X - \sigma ; X + \sigma]$? Et dans l'intervalle $[X - 2\sigma ; X + 2\sigma]$?
2. a. Quelle est l'ancienne notation des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$?
b. A cause de qui cette notation a-t-elle pris le dessus progressivement ?
3. Compléter la formule du binôme de Newton : $(a + b)^n = \dots$

MATHEMATIQUES N°4

Exercice 1 : (2 points)

1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 0,75)$ car le franchissement de chaque haie est indépendant des autres franchissements.

(0,5)

$$2. p(X = 10) = \binom{10}{10} 0,75^{10} \times 0,25^0 = 0,75^{10} \approx 0,056$$

(0,5)

$$3. p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10) = \binom{10}{9} 0,75^9 \times 0,25^1 + 0,75^{10} = 10 \times 0,75^9 \times 0,25 + 0,75^{10} \approx 0,244$$

(1)

Exercice 1 : (5,5 points)

1. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + x + x^2 + x^3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x+1} = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(0,75)

2. a. On a $1 < x$ donc $x < x^2$ en multipliant par $x > 0$.

Et de même ; $x < x^2$ donne $x^2 < x^3$.

Donc $1 < x < x^2 < x^3$.

(0,75)

b. On a $0 < 1 + x + x^2 + x^3 < x^3 + x^3 + x^3 + x^3$ d'après a.

$$0 < (1 + x + x^2 + x^3)e^{-2x+1} < 4x^3e^{-2x+1}$$

$$0 < f(x) < 4x^3e^{-2x+1}$$

(0,75)

c. $\frac{e}{2}(2x)^3e^{-2x} = \frac{e}{2} \times 8x^3 \times e^{-2x} = 4ex^3 \times e^{-2x}$

$$= 4ex^3 \times e^{-2x}$$

$$= 4x^3 \times e^{-2x+1}$$

(0,5)

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3e^{-2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{2}(2x)^3e^{-2x}$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e}{2}X^3e^{-X} \text{ où } X = 2x$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e}{2} \times \frac{X^3}{e^X}$$

Or, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^3}{e^X} = 0$ par croissances comparées.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3e^{-2x+1} = 0$.

(1,5)

e. D'après b., pour $x > 1$, $0 < f(x) < 4x^3e^{-2x+1}$

Et d'après d., $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3e^{-2x+1} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on peut donc dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(1)

On a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

(0,25)

Exercice 2 : (3 points)

Je note n le nombre de cours auquel un élève assiste et X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs faites par son prof de maths durant ces n cours. Les erreurs étant indépendantes les unes des autres, on peut dire que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 0,025)$.

$$p(X \geq 1) \geq 0,5 \Leftrightarrow 1 - p(X = 0) \geq 0,5$$

$$\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} 0,025^0 \times 0,975^n \geq 0,5$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,975^n \geq 0,5$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,5 \geq 0,975^n$$

$$\Leftrightarrow 0,5 \geq 0,975^n$$

(1,5)

C'est à partir du 28^{ème} cours que la probabilité d'avoir assisté à au moins une erreur dépassera 50%.

(0,75)

Exercice 3 : (2,5 points)

$$7xe^{5-2,4x} = 7xe^5e^{-2,4x}$$

$$= \frac{7e^5}{-2,4} \times (-2,4x)e^{-2,4x}$$

$$= \frac{-7e^5}{2,4} \times Xe^X \text{ avec } X = -2,4x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 7xe^{5-2,4x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{-7e^5}{2,4} \times Xe^X = 0 \text{ par croissances comparées}$$

(2,5)

Exercice 4 : (2,5 points)

1. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10\,000; 0,92)$ car les défauts des composants peuvent être considérés comme identiques et indépendants.

(0,5)

$$p(X \leq 9\,145) \approx 0,0231 \text{ et } p(X \leq 9\,146) \approx 0,0251 \text{ donc } a = 9\,145.$$

(1,25)

$$p(X \leq 9\,252) \approx 0,9744 \text{ et } p(X \leq 9\,253) \approx 0,9766 \text{ donc } b = 9\,253.$$

2. Il y a plus de 95% de chances que le professionnel ait entre 9 145 et 9 253 composants sans défauts dans sa commande de 10 000 composants.

(0,75)

Exercice 5 : (4,5 points)

$$f_1'(x) = \frac{5}{3} - \frac{7}{2} \times \frac{-1}{x^2}$$
$$= \frac{5}{3} + \frac{7}{2x^2} \quad \textcircled{1}$$

$$f_3'(x) = \frac{5(4-2x) + 2(3+5x)}{4-2x}$$
$$= \frac{20-10x+6+10x}{(4-2x)^2}$$
$$= \frac{26}{(4-2x)^2} \quad \textcircled{1}$$

$$f_5(x) = (3x-2)(4-x)$$
$$f_5'(x) = 3(4-x) - (3x-2)$$
$$= 12-3x-3x+2$$
$$= 14-6x \quad \textcircled{1}$$

Bonus : (+1,25 points)

1. a. $V(X) = np(1-p)$ $\textcircled{+0,25}$

b. 68% dans $[X-\sigma; X+\sigma]$ et 95% dans $[X-2\sigma; X+2\sigma]$. $\textcircled{+0,25}$

2. a. C'est C_n^k . $\textcircled{+0,25}$

b. A cause des anglo-saxons. $\textcircled{+0,25}$

3. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ $\textcircled{+0,25}$

$$f_2'(x) = -5 \times \frac{-7}{x^8}$$
$$= \frac{35}{x^8} \quad \textcircled{0,5}$$

$$f_4(x) = 2(4\sqrt{x}-1) \times \frac{4}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{4(4\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} \quad \textcircled{1}$$