

MATHEMATIQUES N°4

Remarque : *Avantage à celles et ceux qui ont fait les contrôles de l'année dernière !*

Exercice 1 : (2 points)

1° Convertir en degrés : $A = \frac{11\pi}{12} \text{ rad}$ $B = \frac{7\pi}{3} \text{ rad}$

2° Convertir en radians et donner la réponse sous forme de fractions simplifiées :
 $C = 160^\circ$ $D = 150^\circ$

Exercice 2 : (2 points)

Tous les calculs nécessaires seront indiqués sur la copie.

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = -2n + 7$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de son quatrième terme.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 3$ et $v_{n+1} = -2v_n + 7$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la valeur de son quatrième terme.
3. On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = 2 - 3n + 2w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer w_1 et w_2 .

Exercice 3 : (4 points)

On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2 - 30n + 16$

- 1° Calculer les trois premiers termes de cette suite.
- 2° Montrer que (v_n) est croissante à partir d'un certain rang à préciser.
- 3° Déterminer le plus petit entier n à partir duquel $v_n \geq 100\,000$

Exercice 4 : (3 points)

1° Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{2n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Cette suite semble-t-elle convergente ? Si oui, conjecture sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

2° Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 50$ et $v_{n+1} = -0,9v_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cette suite semble-t-elle convergente ? Si oui, conjecture sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 5 : (1 points)

Le 1^{er} terme d'une suite étant saisi dans la variable u , l'algorithme ci-dessous permet de calculer le terme de rang n de cette suite :

Pour i variant de 1 à n :
 $| u = -2 \times u + 5$
 Fin Pour

1° Donner la forme récurrente de la suite qui se « cache » dans cet algorithme.

2° Si l'on entre $u = 1$ et $n = 4$, quel terme de la suite obtient-on et que vaut-il ?
(calculs non demandés)

Exercice 5 : (8 points)

1° Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{3x+4}{5-2x} \quad f_2(x) = \frac{8x}{5} + \frac{5}{8x} \quad f_3(x) = \frac{3}{7-5x}$$

$$f_4(x) = \sqrt{3x+8} \quad f_5(x) = (4-3x)(2x-5)$$

2° a. Calculer la dérivée de la fonction $h(x) = 2x^3 + 13x^2 - 20x + 7$

b. Factoriser $h'(x)$.

3° Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $u(x) = 5x^2 - 3x + 1$ au point d'abscisse 2 ?

Bonus : a. Qui a généralisé le théorème de Pythagore ?

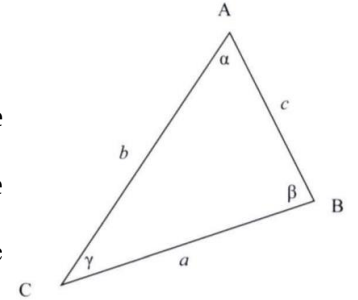
b. De quelle origine était-il ?

c. A quelle époque vivait-il approximativement ?

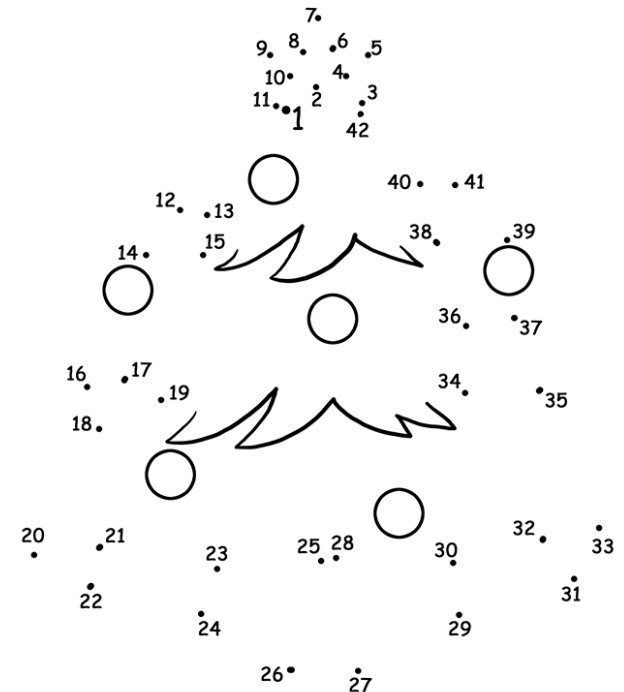
d. Quel est l'énoncé du « théorème de Pythagore généralisé » ? (cf figure ci-contre)

e. Quelle formule de trigonométrie ce théorème permet-il de prouver ?

f. L'article cite deux mathématiciens ayant prouvé cette formule de trigonométrie : lesquels ?



Ca ne rapportera pas de points, mais si tu as terminé et que tu t'ennuies...



MATHEMATIQUES N°4

Exercice 1 : (2 points)

$$1^{\circ} A = \frac{11\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = 165^{\circ} \quad (0,5)$$

$$B = \frac{7\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 420^{\circ} \quad (0,5)$$

$$2^{\circ} C = 160 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8\pi}{9} \text{ rad} \quad (0,5)$$

$$D = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \quad (0,5)$$

Exercice 2 : (2 points)

$$1. \text{ Son quatrième terme est } u_3 \text{ et } u_3 = -2 \times 3 + 7 = 1. \quad (0,5)$$

$$2. \text{ Son quatrième terme est } v_4.$$

$$v_2 = -2v_1 + 7 \\ = -2 \times 3 + 7 \\ = 1$$

$$v_3 = -2v_2 + 7 \\ = -2 \times 1 + 7 \\ = 5$$

$$v_4 = -2v_3 + 7 \\ = -2 \times 5 + 7 \\ = -3 \quad (0,75)$$

$$3. w_1 = 2 - 3 \times 0 + 2w_0 \\ = 2 - 0 + 2 \times 2 \\ = 6$$

$$w_2 = 2 - 3 \times 1 + 2w_1 \\ = 2 - 3 + 2 \times 6 \\ = 11 \quad (0,75)$$

Exercice 3 : (4 points)

$$1^{\circ} v_0 = 0^2 - 30 \times 0 + 16 = 16$$

$$v_1 = 1^2 - 30 \times 1 + 16 = 1 - 30 + 16 = -13 \quad (0,75)$$

$$v_2 = 2^2 - 30 \times 2 + 16 = 4 - 60 + 16 = -40$$

$$2^{\circ} v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - 30(n+1) + 16 - (n^2 - 30n + 16) \\ = n^2 + 2n + 1 - 30n - 30 + 16 - n^2 + 30n - 16 \\ = 2n - 29$$

$$2n - 29 \geq 0 \text{ si } 2n \geq 29 \\ \text{si } n \geq \frac{29}{2} \\ \text{si } n \geq 14,5$$

$$\text{Autrement dit, dès que } n \geq 15, \text{ la suite est croissante.} \quad (1,75)$$

$$3^{\circ} v_n \geq 100\,000 \Leftrightarrow n^2 - 30n + 16 \geq 100\,000 \\ \Leftrightarrow n^2 - 30n + 16 - 100\,000 \geq 0 \\ \Leftrightarrow n^2 - 30n - 99\,984 \geq 0$$

$$\Delta = (-30)^2 - 4 \times 1 \times (-99\,984) \\ = 400\,836$$

$$\text{D'où : } x_1 = \frac{30 - \sqrt{400\,836}}{2} \approx -301,6 \text{ et } x_2 = \frac{30 + \sqrt{400\,836}}{2} \approx 331,6 \\ \text{C'est à partir du 332}^{\text{ème}} \text{ terme que } v_n \geq 100\,000. \quad (1,5)$$

Exercice 4 : (3 points)

$$1^{\circ} a. u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2n-1} \\ = \frac{1}{2n+2-1} - \frac{1}{2n-1} \\ = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \\ = \frac{2n-1 - (2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} \\ = \frac{2n-1-2n-1}{(2n+1)(2n-1)} \\ = \frac{-2}{(2n+1)(2n-1)} < 0 \text{ car } n \geq 1$$

$$\text{Donc } (u_n) \text{ est décroissante.} \quad (2)$$

$$b. \text{ Cette suite semble convergente, et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0. \quad (0,5)$$

$$2^{\circ} \text{ Cette suite semble convergente, et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \approx 0,5263157895 \quad (0,5) \quad (c-a-d \frac{10}{19})$$

Exercice 5 : (1 points)

$$1. \text{ La suite cachée dans ce programme est } u_{n+1} = -2 \times u_n + 5. \quad (0,25)$$

$$2. \text{ On obtient le 5}^{\text{ème}} \text{ terme de la suite, et il vaut } -9. \quad (0,75)$$

Exercice 5 : (8 points)

$$1^{\circ} f_1'(x) = \frac{3(5-2x) - (-2)(3x+4)}{(5-2x)^2} \quad f_2'(x) = \frac{8}{5} + \frac{5}{8} \times \frac{-1}{x^2} \\ = \frac{15-6x+6x+8}{(5-2x)^2} = \frac{23}{(5-2x)^2} \quad (1,25) \\ = \frac{23}{(5-2x)^2} \quad (1,25)$$

$$f_3'(x) = 3 \times \frac{-(-5)}{(7-5x)^2} \\ = \frac{15}{(7-5x)^2} \quad (1)$$

$$f_4'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+8}} \times 3 \\ = \frac{3}{2\sqrt{3x+8}} \quad (0,75)$$

$$\begin{aligned}
 f_5'(x) &= -3(2x - 5) + 2(4 - 3x) \\
 &= -6x + 15 + 8 - 6x \\
 &= -12x + 23 \quad \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2^\circ \text{ a. } h'(x) &= 2 \times 3x^2 + 13 \times 2x - 20 \\
 &= 6x^2 + 26x - 20 \quad \textcircled{0,5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } h'(x) &= 2(3x^2 + 13x - 10) \\
 \Delta &= 13^2 - 4 \times 3 \times (-10) \\
 &= 169 + 120 \\
 &= 289 \\
 x_1 &= \frac{-13 - 17}{2 \times 3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-13 + 17}{2 \times 3} \\
 x_1 &= -\frac{30}{6} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\
 \text{Donc } h'(x) &= 6(x + 5)(x - \frac{2}{3}) \\
 &= (x + 5)(6x - 4) \quad \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3^\circ u'(x) &= 5 \times 2x - 3 \\
 &= 10x - 3
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u'(2) = 10 \times 2 - 3 = 20 - 3 = 17$$

$$\text{Et } u(2) = 5 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 20 - 6 + 1 = 15$$

L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction u au point d'abscisse 2 est :

$$\begin{aligned}
 y &= 17(x - 2) + 15 \\
 &= 17x - 34 + 15 \\
 &= 17x - 19 \quad \textcircled{1,5}
 \end{aligned}$$

Bonus : a. Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi (mais Al-Kashi suffit 😊)

b. Il était d'origine Perse (Iran accepté)

c. Il a vécu de 1380 à 1429 (réponse approximative / siècle accepté)

$$\text{d. } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\text{e. } \cos(\beta + \gamma) = \cos(\beta) \cos(\gamma) - \sin(\beta) \sin(\gamma) \quad \textcircled{+0,25}$$

f. Gauss et Euler