

# MATHEMATIQUES N°3

Remarques : Dernier contrôle du trimestre, dernière occasion de briller !

## Exercice 1 : (8,5 points)

Dans cet exercice, on considère la suite  $(T_n)$  définie par  $T_0 = 180$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$ .

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_n > 20$ .  
 b. Vérifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$ .  
 En déduire le sens de variation de la suite  $(T_n)$ .  
 c. Conclure de ce qui précède que la suite  $(T_n)$  est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = T_n - 20$ .  
 a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.  
 b. En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$ .  
 c. Calculer la limite de la suite  $(T_n)$ .  
 d. A l'aide de la calculatrice, sans fournir la moindre explication, résoudre l'inéquation  $T_n \leq 120$  d'inconnue  $n$  entier naturel.

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de  $180^\circ \text{C}$  et celle de l'air ambiant de  $20^\circ \text{C}$ .

La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente  $(T_n)$ . Plus précisément,  $T_n$  représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius,  $n$  minutes après sa sortie du four.

- a. Expliquer pourquoi la limite de la suite  $(T_n)$  déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.

- b. On considère l'algorithme ci-dessous :

Demander la valeur de  $x$

Affecter 180 à  $T$

Affecter 0 à  $n$

Tant que  $T > x$  :

Affecter  $0,955 \times T + 0,9$  à  $T$

Affecter  $n + 1$  à  $n$

Afficher  $n$

Donner le résultat obtenu lorsque la valeur entrée est 120 et l'interpréter dans le cadre de l'exercice.

## Exercice 2 : (7,5 points)

En justifiant soigneusement, déterminer :

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  où  $u_n = \frac{3^n - 5^n}{2^n + 7^{n+1}}$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  où  $v_n = \sqrt{4n^2 + 3} - 2n$
3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 12x - 63}{2x - 6}$

## Exercice 3 : (1,5 points)

$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites telles que  $u_n = \frac{3v_n - 1}{5 + 7v_n}$ .

Exprimer  $v_n$  en fonction de  $u_n$ .

## Exercice 4 : (2,5 points)

On pose  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 4$ .

On admet que  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 16$  et que  $(u_n)$  converge donc vers un réel  $\ell$  (On « admet », ça veut dire que pour le moment, il n'y a rien à faire...)

1. Démontrer que  $\ell$  est solution de  $\ell^2 - 12\ell + 16 = 0$ .
2. Déterminer la valeur de  $\ell$ .

## Bonus : (+1,5 points)

1. Dans le problème posé par Léonard de Pise, on trouve une histoire de lapins. Mais à l'origine, quels animaux trouvait-on dans ce problème ?
2. Quelle est la relation de récurrence qui définit la suite de Fibonacci ?
3. Compléter la suite de Fibonacci :  $1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - \dots$
4. Que vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$  ?
5. Donner la formule puis la valeur approchée à  $10^{-4}$  près de  $p(X = 23)$  lorsque  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(60 ; 0,4)$ .

# MATHEMATIQUES N°3

## Exercice 1 : (8,5 points)

1. a. Initialisation :  $n = 0$

$T_0 = 180$  donc  $T_0 > 20$  : c'est vérifié.

Hérédité : supposons que  $T_n > 20$  pour un certain rang  $n$ .

Montrons que  $T_{n+1} > 20$ .

On sait que  $T_n > 20$  par HR.

$$0,955T_n > 0,955 \times 20$$

$$0,955T_n + 0,9 > 19,1 + 0,9$$

$$T_{n+1} > 20$$

Par récurrence, on a bien  $T_n > 20$  pour tout entier naturel  $n$ . (1,5)

$$\begin{aligned} \text{b. } T_{n+1} - T_n &= 0,955T_n + 0,9 - T_n \\ &= -0,045T_n + 0,9 \\ &= -0,045(T_n - 20) \end{aligned}$$

Or,  $T_n > 20$  donc  $T_n - 20 > 0$  et donc  $-0,045(T_n - 20) < 0$ .

Autrement dit,  $T_{n+1} - T_n < 0$  : la suite  $(T_n)$  est décroissante. (1,5)

c.  $(T_n)$  est décroissante et minorée par 20 : on en déduit que  $(T_n)$  converge. (0,75)

$$\begin{aligned} \text{2. a. } u_{n+1} &= T_{n+1} - 20 \\ &= 0,955T_n + 0,9 - 20 \\ &= 0,955(u_n + 20) - 19,1 \\ &= 0,955u_n + 19,1 - 19,1 \\ &= 0,955u_n \end{aligned}$$

Donc  $(u_n)$  est une géométrique de raison 0,955. (1,5)

$$\begin{aligned} \text{b. On a } u_n &= u_0 \times 0,955^n \\ &= (180 - 20) \times 0,955^n \\ &= 160 \times 0,955^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } T_n &= u_n + 20 \\ &= 160 \times 0,955^n + 20 \end{aligned} \quad (1)$$

c. Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,955^n = 0$  car  $-1 < 0,955 < 1$ .

D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 20$ . (0,75)

d. On obtient  $n = 11$ . (0,5)

3. a. Un gâteau qui sort du four refroidit nécessairement, et sa température finit inexorablement par s'approcher de la température ambiante, soit  $20^\circ$ . (0,25)

b. On obtient  $n = 11$  (comme dans la question 2.d.). Cela signifie qu'après 11 minutes passées à température ambiante, la température du gâteau est inférieure à  $120^\circ$ . (0,75)

## Exercice 2 : (7,5 points)

$$\begin{aligned} 1. \frac{3^n - 5^n}{2^n + 7^{n+1}} &= \frac{5^n \left( \frac{3^n}{5^n} - 1 \right)}{7^n \left( \frac{2^n}{7^n} + 7 \right)} \\ &= \left( \frac{5}{7} \right)^n \frac{\left( \frac{3}{5} \right)^n - 1}{\left( \frac{2}{7} \right)^n + 7} \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{5}{7} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{5} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{7} \right)^n = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad (2,5)$$

$$\begin{aligned} 2. \sqrt{4n^2 + 3} - 2n &= \frac{(\sqrt{4n^2 + 3} - 2n)(\sqrt{4n^2 + 3} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + 3} + 2n} \\ &= \frac{4n^2 + 3 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 3} + 2n} \\ &= \frac{3}{\sqrt{4n^2 + 3} + 2n} \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4n^2 + 3} + 2n = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ par quotient.} \quad (2,5)$$

$$\begin{aligned} 3. \Delta &= 12^2 - 4 \times 3 \times (-63) \\ &= 144 + 756 \\ &= 900 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } x_1 &= \frac{-12 - \sqrt{900}}{2 \times 3 - (-12 - 30)} & \text{et} & \quad x_2 = \frac{-12 + \sqrt{900}}{2 \times 3 - (-12 + 30)} \\ &= \frac{-12 - 30}{6} & & \quad = \frac{-12 + 30}{6} \\ &= \frac{-42}{6} = -7 & & \quad = \frac{18}{6} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{3x^2 + 12x - 63}{2x - 6} &= \frac{3(x + 7)(x - 3)}{2(x - 3)} \\ &= \frac{3(x + 7)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Par conséquent, } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 12x - 63}{2x - 6} = \frac{3(3 + 7)}{2} = 15 \quad (2,5)$$

**Exercice 3 :** (1,5 points)

$$u_n = \frac{3v_n - 1}{5 + 7v_n}$$

$$u_n(5 + 7v_n) = 3v_n - 1$$

$$5u_n + 7u_nv_n = 3v_n - 1$$

$$7u_nv_n - 3v_n = -1 - 5u_n$$

$$v_n(7u_n - 3) = -1 - 5u_n$$

$$v_n = \frac{-1 - 5u_n}{7u_n - 3}$$

$$= \frac{1 + 5u_n}{3 - 7u_n} \quad (1,5)$$

**Exercice 4 :** (2,5 points)

1. On a  $\ell = 2\sqrt{\ell} + 4$ .

$$\ell - 4 = 2\sqrt{\ell}$$

$$(\ell - 4)^2 = 4\ell$$

$$\ell^2 - 8\ell + 16 = 4\ell$$

$$\ell^2 - 8\ell + 16 - 4\ell = 0$$

$$\ell^2 - 12\ell + 16 = 0 \quad (1)$$

$$2. \Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 16$$

$$= 144 - 64$$

$$= 80$$

$$\text{D'où : } l_1 = \frac{12 + \sqrt{80}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{12 + 4\sqrt{5}}{2}$$

$$= 6 + 2\sqrt{5} \approx 10,5$$

et

$$l_2 = \frac{12 - \sqrt{80}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{12 - 4\sqrt{5}}{2}$$

$$= 6 - 2\sqrt{5} \approx 1,53$$

Or,  $u_1 = 4$  et  $(u_n)$  est croissante donc 1,53 n'est pas possible.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 6 + 2\sqrt{5}. \quad (1,5)$$

**Bonus :**

1. Des lemmings  $(+0,25)$

$$2. F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (+0,25)$$

$$3. 34 \quad (+0,25)$$

4. Le nombre d'or,  $\phi \quad (+0,25)$

$$5. p(X = 23) = \binom{60}{23} 0,4^{23} \times 0,6^{37} \approx 0,4511 \quad (+0,5)$$