

Approximation du nombre « e »

Théorème-définition : La fonction exponentielle est l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Comment à partir de cette simple définition peut-on déterminer une valeur approchée du nombre e ... ?

L'idée de départ est la formule $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Autrement dit, si h est proche de 0 alors $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
 $h \times f'(a) \approx f(a+h) - f(a)$
 $f(a+h) \approx f(a) + h \times f'(a)$

C'est ce qu'on appelle une approximation affine de la fonction f .

Or, dans le cas de la fonction exponentielle, $f' = f$ donc $f(a+h) \approx f(a) + h \times f(a)$
 $f(a+h) \approx f(a)(1+h)$

On dispose du point de départ $f(0) = 1$. Prenons un pas de $h = 0,1$.

$$f(0+0,1) \approx f(0)(1+0,1) \text{ où } a=0$$

$$f(0,1) \approx 1,1$$

Puis $f(0,1+0,1) \approx f(0,1)(1+0,1)$ où $a=0,1$
 $f(0,2) \approx 1,21$

$f(0,2+0,1) \approx f(0,2)(1+0,1)$ où $a=0,2$
 $f(0,3) \approx 1,331$

Et de proche en proche, on obtient $f(1) \approx 2,59374246...$ (et $f(1)$, c'est le nombre e)

On peut procéder de même en prenant comme pas 0,01. On obtient alors $f(1) \approx 2,70481383$

Et $f(1) \approx 2,71692393$ avec un pas de 0,001 ; puis 2,71814593 avec 0,0001.

Algorithme

Demander H

Affecter 0 à X

Affecter 1 à E

Tant que $X \neq 1$

 Affecter $X + H$ à X

 Affecter $(1 + H)^*E$ à E

Fin

Afficher E

Pour une approximation explicite, on partage l'intervalle $[0 ; 1]$ en n intervalles de même amplitude.

On a alors $f\left(0 + \frac{1}{n}\right) \approx f(0)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, c'est à dire $f\left(\frac{1}{n}\right) \approx 1 + \frac{1}{n}$

Puis $f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) \approx f\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$f\left(\frac{2}{n}\right) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

Et par récurrence, $f\left(\frac{n}{n}\right) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, soit $f(1) \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Autrement dit, $e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Avec $n = 10\,000$, on retrouve l'approximation $e \approx 2,7181459...$