

MATHEMATIQUES N°3

Remarque : présentation et rédaction sont à soigner !

Exercice 1 : (2 points)

Pour chaque question, indiquer n° de la question ainsi que la lettre correspondant à la bonne réponse. Les justifications *ne sont pas* demandées.

Une bonne réponse rapporte 0,5 points ; une mauvaise réponse fait perdre 0,25 points ; et ne pas répondre ne fait ni gagner ni perdre de points.

1° Si $f(x) = 2(x + 7)(x - 3)$, alors les racines de f sont :

- A. -7 et 3 B. -7 et -3 C. 7 et 3 D. 7 et -3

2° L'équation $15x^2 - 13x + 3 = 0$ a :

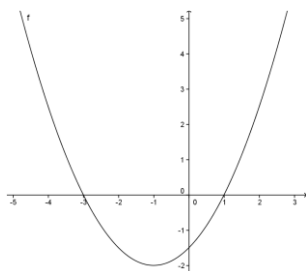
- A. Trois solutions B. Deux solutions
C. Une seule solution D. Zéro solutions

3° L'inéquation $-3x^2 + 3x + 6 < 0$ a pour solution :

- A. $x \in [-1; 2]$ B. $x \in]-1; 2[$
C. $x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$ D. $x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$

4° Pour la représentation graphique ci-contre, on peut dire que :

- A. $\Delta = 0$
B. $\Delta > 0$
C. $\Delta < 0$
D. Δ plane 😊



Exercice 2 : (3 points)

Résoudre les inéquations suivantes :

- a. $35 - 16x - 3x^2 < 0$
b. $8x^2 - 5x + 1 \geq 4x^2 - 8x - 1$

Exercice 3 : (3 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x^3 - x^2 + 13x - 6$

1° Vérifier que 2 est une racine de f .

2° Vérifier que $f(x) = (x - 2)(-2x^2 - 5x + 3)$

3° a. Factoriser $h(x) = -2x^2 - 5x + 3$.

b. En déduire la factorisation complète de $f(x)$.

Exercice 4 : (2 points)

Déterminer les deux nombres dont la somme vaut 46,3 et le produit 321,3.

Donner ces deux nombres sans la moindre explication ne rapportera pas de points : il faut impérativement utiliser la méthode vue en classe...

Exercice 5 : (6 points)

1° Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

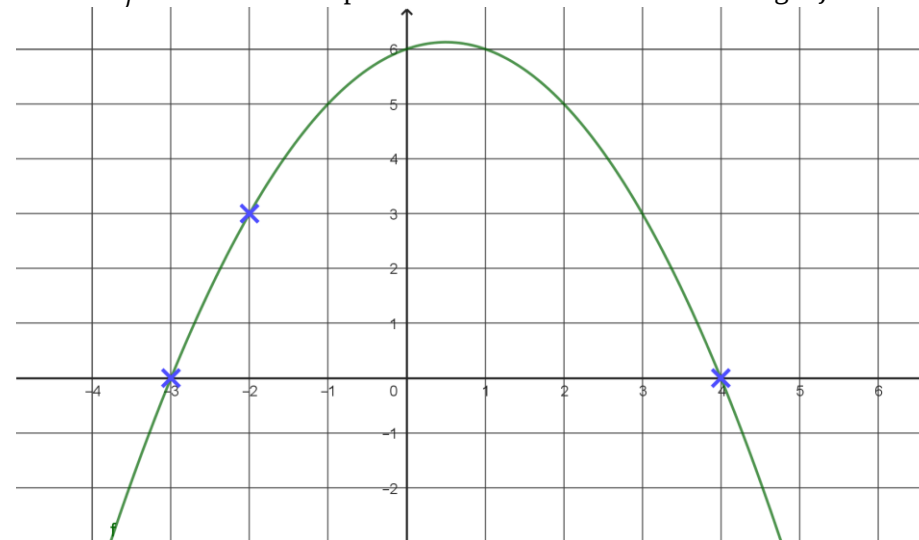
$$f_1(x) = (3 - 5x)(9x - 1) \quad f_2(x) = \frac{5x}{8} - \frac{8}{5x}$$

$$f_3(x) = (4 - 3x)^2 \quad f_4(x) = x\sqrt{2} - \pi$$

2° Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $u(x) = 5x^2 - 3x + 1$ au point d'abscisse 2 ?

Exercice 6 : (2 points)

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est la parabole de la fonction du second degré f :



En détaillant la démarche, déterminer une expression algébrique de $f(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$.

Exercice 7 : (2 points)

En posant $X = x^2$, résoudre l'équation $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

Bonus : a. Quel est le titre de l'article qu'il fallait lire ?

b. Sous quelle forme Bombelli a-t-il eu l'idée de chercher les solutions de $x^3 - 15x - 4 = 0$?

c. Lorsque Bombelli arrive à $5(X - 2)^2 = -121$, que fait-il... ?

d. Pourquoi Bombelli n'a-t-il pas trouvé les deux autres solutions de son équation, à savoir $-2 + \sqrt{3}$ et $-2 - \sqrt{3}$?

e. Quel mathématicien s'est intéressé aux équations du 4^{ème} degré dans les années 1500 ?

f. A quel âge devient-il conférencier de la Fondation Piatti à Milan ?

MATHEMATIQUES N°3

Exercice 1 : (2 points)

1° A

0,5

2° D

0,5

3° D

0,5

4° B

0,5

-0,25

Exercice 2 : (3 points)

a. $35 - 16x - 3x^2 < 0$

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \times (-3) \times 35$$

$$= 256 + 420$$

$$= 676$$

$$\text{D'où : } x_1 = \frac{16 - \sqrt{676}}{2 \times (-3)}$$

$$= \frac{16 - 26}{-6}$$

$$= \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$$

et

$$x_2 = \frac{16 + \sqrt{676}}{2 \times (-3)}$$

$$= \frac{16 + 26}{-6}$$

$$= \frac{42}{-6} = -7$$

$$\text{Donc } x \in]-\infty; -7[\cup \left] \frac{5}{3}; +\infty \right[\quad (2)$$

b. $8x^2 - 5x + 1 \geq 4x^2 - 8x - 1$

$$8x^2 - 5x + 1 - 4x^2 + 8x + 1 \geq 0$$

$$4x^2 + 3x + 2 \geq 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 4 \times 2$$

$$= 9 - 32$$

$$= -23 < 0$$

$$\text{Donc } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 : (3 points)

1° $f(2) = -2 \times 2^3 - 2^2 + 13 \times 2 - 6$

$$= -2 \times 8 - 4 + 26 - 6$$

$$= 0$$

$$\text{Donc 2 est bien une racine de } f. \quad (0,5)$$

2° $(x - 2)(-2x^2 - 5x + 3) = -2x^3 - 5x^2 + 3x + 4x^2 + 10x - 6$

$$= -2x^3 - x^2 + 13x - 6$$

$$= f(x) \quad (0,25)$$

3° a. $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times 3$

$$= 25 + 24$$

$$= 49$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } x_1 &= \frac{5 - \sqrt{49}}{2 \times (-2)} \\ &= \frac{5 - 7}{-4} \\ &= \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5 + \sqrt{49}}{2 \times (-2)} \\ &= \frac{5 + 7}{-4} \\ &= \frac{12}{-4} = -3 \end{aligned}$$

$$\text{On a alors } g(x) = -2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 3) = (-2x + 1)(x + 3) \quad (2)$$

b. D'où $f(x) = -2(x - 2) \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 3) = (x - 2)(-2x + 1)(x + 3) \quad (0,25)$

Exercice 4 : (2 points)

Ces deux nombres sont solutions de $x^2 - 46,3x + 321,3 = 0$.

$$\Delta = (-46,3)^2 - 4 \times 1 \times 321,3$$

$$= 2\,143,69 - 1\,285,2$$

$$= 858,49$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } x_1 &= \frac{46,3 - \sqrt{858,49}}{2} \\ &= \frac{46,3 - 29,3}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{17}{2} = 8,5$$

et

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{46,3 + \sqrt{858,49}}{2} \\ &= \frac{46,3 + 29,3}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{75,6}{2} = 37,8$$

Les deux nombres cherchés étaient donc 8,5 et 37,8. (2)

Exercice 5 : (6 points)

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= -5(9x - 1) + 9(3 - 5x) \\ &= -45x + 5 + 27 - 45x \\ &= -90x + 32 \quad (1,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{5}{8} - \frac{8}{5} \times \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{5}{8} + \frac{8}{5x^2} \quad (1,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 2(4 - 3x) \times (-3) \\ &= -6(4 - 3x) \quad (1) \end{aligned}$$

$$f_4'(x) = \sqrt{2} \quad (0,5)$$

2° $u'(x) = 5 \times 2x - 3$

$$= 10x - 3$$

$$\text{Donc } u'(2) = 10 \times 2 - 3 = 20 - 3 = 17$$

$$\text{Et } u(2) = 5 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 20 - 6 + 1 = 15$$

$$\text{D'où } T_2 : y = 17(x - 2) + 15$$

$$= 17x - 34 + 15$$

$$= 17x - 19 \quad (1,5)$$

$$= \frac{25x^2 + 64}{40x^2} \quad (+0,25)$$

Exercice 6 : (2 points)

On a $f(x) = a(x - 4)(x + 3)$ car 4 et -3 sont ces racines. **0,5**

De plus $f(-2) = 3$

$$a(-2 - 4)(-2 + 3) = 3$$

$$a \times (-6) \times 1 = 3$$

$$-6a = 3$$

$$a = \frac{3}{-6} = -0,5 \quad \mathbf{1}$$

Donc $f(x) = -0,5(x - 4)(x + 3)$

$$= -0,5(x^2 + 3x - 4x - 12)$$

$$= -0,5x^2 + 0,5x + 6 \quad \mathbf{0,5}$$

Exercice 7 : (2 points)

En posant $X = x^2$, l'équation devient $X^2 - 11X + 18 = 0$

$$\Delta = (-11)^2 - 4 \times 1 \times 18$$

$$= 121 - 72$$

$$= 49$$

$$\begin{array}{lcl} \text{D'où :} & X_1 = \frac{11 - \sqrt{49}}{2 \times 1} & \text{et} & X_2 = \frac{11 + \sqrt{49}}{2 \times 1} \\ & = \frac{11 - 7}{2} & & = \frac{11 + 7}{2} \\ & = \frac{4}{2} = 2 & & = \frac{18}{2} = 9 \end{array}$$

Or, $X = x^2$ donc on doit résoudre $x^2 = 2$ et $x^2 = 9$.

On obtient alors quatre solutions : $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 3 et -3. **2**

Bonus : a. Les manipulations algébriques.

b. $x = u + v$

c. Il introduit $\sqrt{-121}$

d. Il ne s'intéressait qu'aux solutions positives.

e. Lodovico Ferrari.

f. A 18 ans.