

MATHÉMATIQUES N°2

Remarque : il est conseillé de soigner la présentation et la rédaction. Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 : (4 points)

En France, chaque véhicule par une plaque d'immatriculation.

Depuis 2009, celle-ci est constituée de trois parties : deux lettres, trois chiffres et deux lettres séparées par des tirets.



Les lettres I, O et U sont exclues à cause de leur ressemblance avec le 1, le 0 et le V.

On donnera le calcul ET sa réponse.

1° a. Combien de plaques différentes peut-on créer ?

b. Pour des raisons historiques, les couples de lettres SS sont interdits. Combien de plaques différentes peut-on donc réellement créer ?

2° a. Un professeur de mathématiques aimerait avoir une plaque contenant les quatre lettres M, A, T et H. Combien de plaques différentes de ce type peut-on créer ?

b. Quelle est alors la probabilité que sa plaque soit de ce type ? On donnera une réponse en pourcentage à 10^{-2} près.

3° La plaque TK-737-KT est une plaque « palindrome » : elle peut se lire de la même manière de la gauche vers la droite et de la droite vers la gauche. Combien de plaques palindromes peut-on créer ?

Exercice 2 : (3 points)

Un clavier de 12 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre parmi A, B et C et de trois chiffres parmi les entiers de 1 à 9.

On donnera le calcul ET sa réponse.

1° Combien de codes différents peut-on former ?

2° Combien de codes y a-t-il sans le chiffre 1 ?

3° Combien de codes y a-t-il comportant au moins une fois le chiffre 1 ?

4° Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

Exercice 3 : (3 points)

Une entreprise comprend 35 employés dont 16 femmes et 19 hommes. On élit le bureau directeur du comité d'entreprise, composé d'un président, d'un vice-président et d'un trésorier, ces postes n'étant pas cumulables.

On donnera le calcul ET sa réponse.

1) Quel est le nombre de bureaux possibles ?

2) Quel est le nombre de bureaux où :

a. le poste de vice-président est occupé par une femme ?

b. le président et le trésorier sont des hommes ?

c. le président et le vice-président sont de sexes différents ?

Exercice 4 : (2,5 points)

Corto et Gabriel font partie d'un club d'échecs de 20 personnes. On doit former un groupe de 6 personnes pour représenter le club lors d'un tournoi.

a. Combien de groupes de 6 personnes peut-on constituer ?

b. Dans combien de groupes peut figurer Corto ?

c. Corto et Gabriel ne pouvant pas être ensemble, combien de groupes peut-on alors former ?

Exercice 5 : (2 points)

Soit f une fonction telle que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad f(4) = 1 \quad f(0) = 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f .

1° Indiquer les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$ et donner leurs équations.

2° Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 6 : (2 points)

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{3 - 2\sqrt{n}}{5n - 7}$. Déterminer sa limite.

Exercice 7 : (3,5 points)

1° a. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} x + 4$

b. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} 8 - x$

2° a. Etudier le signe de $3x^2 - 10x - 8$

b. Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{3x - 5}{3x^2 - 10x - 8}$

Bonus 1 : Sans explication, donner le développement de $(x + y)^5$

Bonus 2 : Compléter la formule : $(a + b)^n = \sum \dots$

Bonus 3 : Au poker, une main est constituée de 5 cartes distribuées au hasard dans un paquet de 52 cartes.

Quel est le nombre total de mains ?

Quel est le nombre total de mains contenant un full, c'est-à-dire un brelan (trois cartes de même valeur) et une paire (deux cartes de même valeur) ?

MATHEMATIQUES N°2

Exercice 1 : (4 points)

1° a. On peut créer $23^4 \times 10^3 = 279\,841\,000$ plaques différentes. (0,5)

b. Pour les groupes de deux lettres, on a $23^2 - 1$ possibilités sans le SS.

Cela fait donc $(23^2 - 1)^2 \times 10^3 = 278\,784\,000$ plaques différentes. (1)

2° a. Il existe $4! \times 10^3 = 24\,000$ plaques avec les lettres M, A, T et H. (0,75)

$$b. \frac{4! \times 10^3}{(23^2 - 1)^2 \times 10^3} \approx 8,6 \times 10^{-5} \approx 0,000\,086 \approx 0,0001$$

Il y a donc environ 0,01% de chances que cela se produise. (0,75)

3. Il suffit de choisir les deux premières lettres et les deux premiers chiffres, ce qui donne $(23^2 - 1) \times 10^2 = 52\,800$ plaques palindromes. (1)

Exercice 2 : (3 points)

1° On peut former $3 \times 9^3 = 2\,187$ codes. (0,75)

2° Il y a alors $3 \times 8^3 = 1\,536$ codes. (0,75)

3° Cela fait donc $2\,187 - 1\,536 = 651$ codes possibles. (0,75)

4° Il y a $3 \times \mathcal{A}_9^3 = 1\,512$ codes. (0,75)

Exercice 3 : (3 points)

1° a. Il existe $\mathcal{A}_{35}^3 = 35 \times 34 \times 33 = 39\,270$ bureaux. (0,75)

2° Il existe $16 \times 34 \times 33 = 17\,952$ bureaux de ce type. (0,75)

3° Il existe $19 \times 18 \times 33 = 11\,286$ bureaux de ce type. (0,75)

4° Il existe $2 \times (19 \times 16 \times 33) = 20\,064$ bureaux de ce type. (0,75)

Exercice 4 : (2,5 points)

a. On peut constituer $\binom{20}{6} = 38\,760$ groupes de 6 personnes. (0,5)

b. Si Corto est dans le groupe, il ne reste plus que 5 membres à choisir parmi 19 personnes. Cela fait donc $\binom{19}{5} = 11\,628$ groupes. (0,75)

c. On commence par compter les groupes avec Corto ET Gabriel : $\binom{18}{4} = 3\,060$

Il suffit ensuite de soustraire : $38\,760 - 3\,060 = 35\,700$ (1,25)

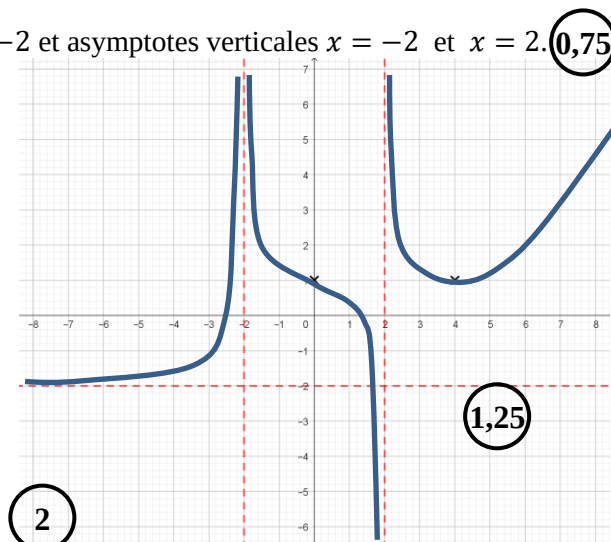
Autre solution : groupes sans Corto ni Gabriel + groupes avec Corto sans Gabriel + groupes sans Corto avec Gabriel

$$\binom{18}{6} + \binom{18}{5} + \binom{18}{5} = 18\,564 + 8\,568 + 8\,568 = 35\,700$$

Exercice 5 : (2 points)

1° Asymptote horizontale $y = -2$ et asymptotes verticales $x = -2$ et $x = 2$. (0,75)

2° Voir graphique ci-contre...



Exercice 6 : (2 points)

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{3 - 2\sqrt{n}}{5n - 7} \\ &= \frac{\sqrt{n} \left(\frac{3}{\sqrt{n}} - 2 \right)}{n \left(5 - \frac{7}{n} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\frac{3}{\sqrt{n}} - 2}{5 - \frac{7}{n}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \times \frac{-2}{5} = 0 \quad (2)$$

Exercice 7 : (3,5 points)

1° a. $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} x + 4 = 0^+$ (0,5)

b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} 8 - x = 0^+$ (0,5)

2° a. $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 100 + 96 = 196$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } x_1 &= \frac{10 - 14}{6} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 14}{6} = \frac{24}{6} = 4 \\ &= \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-2/3$	4	$+\infty$	
$3x^2 - 10x - 8$	+	0	-	0	+

1

(1)

b. $\lim_{x \rightarrow 4} 3x - 5 = 3 \times 4 - 5 = 7$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} 3x^2 - 10x - 8 = 0^-$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{3x - 5}{3x^2 - 10x - 8} = -\infty \quad (1,5)$$

Bonus 1 : $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ (+0,25)

Bonus 2 : $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ (+0,5)

Bonus 3 : $\binom{52}{5}$ mains et $\binom{13}{1} \binom{4}{3} \binom{12}{1} \binom{4}{2} = 13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3\,744$ fulls. (+0,5)