

MATHEMATIQUES N°1.1

Remarques : il est conseillé d'accorder un soin particulier à la présentation et à la rédaction. Les exercices peuvent être faits dans l'ordre de ton choix.

Exercice 1 : (4,5 points)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Exercice 2 : (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{1}{2}u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que $0,5 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : (5,5 points)

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

On rappelle que $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-1}$

Exercice 4 : (5 points)

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{4 + 5n - 2n^2}{8 - 3n}$
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{8 - 3n}{5n^2 - 4n + 7}$

Bonus 1 : compléter la définition de « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ » : $\forall \dots$

Bonus 2 : Qu'illustre l'encart jaune de la quatrième page intitulé « *Un grain de sable dans la récurrence* », lorsqu'on souhaite montrer par récurrence que $x_n = 6^n + 1$ est un multiple de 5 ? (une courte phrase suffit pour répondre)

Bonus 3 : déterminer deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 37.$$

MATHEMATIQUES N°1.2

Remarques : il est conseillé d'accorder un soin particulier à la présentation et à la rédaction. Les exercices peuvent être faits dans l'ordre de ton choix.

Exercice 1 : (4,5 points)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Exercice 2 : (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{1}{2}u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que $0,5 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : (5,5 points)

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

On rappelle que $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-1}$

Exercice 4 : (5 points)

1. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{4 + 5n - 2n^2}{8 - 3n}$
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{8 - 3n}{5n^2 - 4n + 7}$

Bonus 1 : compléter la définition de « $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ » : $\forall \dots$

Bonus 2 : Compléter l'extrait suivant : *La première apparition explicite du principe de démonstration par récurrence fut l'œuvre de* **Prénom + NOM** *d'un mathématicien français (1623-1662), dans son «* **Traité du triangle arithmétique** *, rédigé vers 1654.*

Bonus 3 : déterminer deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = 37$$

MATHEMATIQUES N°1

Exercice 1 : (4,5 points)

Initialisation : $n = 0$

$u_0 = 2$ et $\frac{2}{2 \times 0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$: la propriété est vérifiée au rang $n = 0$. (0,75)

Hérédité : supposons que $u_n = \frac{2}{2n+1}$ pour un certain rang n . (0,75)

Montrons que $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}$

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+1} &= \frac{u_n}{1 + \frac{u_n}{2}} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{1 + \frac{\frac{2}{2n+1}}{2}} \text{ par HR} \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1}{2} + \frac{2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+3} \\ &= \frac{2}{2n+3} \end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc $u_n = \frac{2}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. (3)

Exercice 2 : (5 points)

Initialisation : $n = 1$

$u_1 = 5 \leq 5$ donc $0,5 \leq u_1 \leq 5$. (0,75)

Hérédité : supposons que $0,5 \leq u_n \leq 5$ pour un certain rang n . (0,75)

Montrons que $0,5 \leq u_{n+1} \leq 5$.

On a $0,5 \leq u_n \leq 5$ par HR.

$$-\frac{1}{2} \times 0,5 \geq -\frac{1}{2} u_n \geq -\frac{1}{2} \times 5$$

$$3 - 0,25 \geq 3 - \frac{1}{5} u_n \geq 3 - 2,5$$

$$5 \geq 2,75 \geq u_{n+1} \geq 0,5$$

Par récurrence, on a donc $0,5 \leq u_n \leq 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. (3,5)

Exercice 3 : (5,5 points)

Initialisation : $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 k \times 2^{k-1} = 1 \times 2^0 = 1 \text{ et } (1-1)2^1 + 1 = 0 \times 2 + 1 = 1$$

La propriété est vérifiée au rang $n = 1$. (0,75)

Hérédité : supposons que $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$ pour un certain rang n .

Montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} = n2^{n+1} + 1$ (0,75)

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} &= \underbrace{1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + \dots + n \times 2^{n-1}}_{(n-1)2^n + 1} + (n+1) \times 2^n \\ &= (n-1)2^n + 1 + (n+1) \times 2^n \text{ par HR} \\ &= 2^n(n-1+n+1) + 1 \text{ (factorisation par } 2^n) \\ &= 2^n \times 2^1 n + 1 \\ &= n2^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

Par récurrence on a donc $\sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (4)

Exercice 4 : (5 points)

1. $u_n = 4 + 5n - 2n^2$

$$= n^2 \left(\frac{4}{n^2} + \frac{5}{n} - 2 \right)$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n} - 2 = -2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ (1,5)

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

$$\begin{aligned} 2. v_n &= \frac{8-3n}{5n^2-4n+7} \\ &= \frac{n \left(\frac{8}{n} - 3 \right)}{n^2 \left(5 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2} \right)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{\frac{8}{n} - 3}{5 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{8}{n} - 3}{5 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{-3}{5}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (3,5)

(+0,25) **Bonus 1.1 :** $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - 4| < \varepsilon$

(+0,5) **Bonus 2.1 :** L'initialisation est nécessaire

(+0,25) **Bonus 3.1 :** $u_n = 37n$ et $v_n = n$ par exemple

Bonus 1.2 : $\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$

Bonus 2.2 : Blaise Pascal

Bonus 3.1 : $u_n = 37n$ et $v_n = \frac{1}{n}$ par exemple